# Übungsaufgaben zur Vorlesung
# **Lineare Algebra und Analytische Geometrie I**

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 07.12.2009 vor der Vorlesung

**Bitte beachten:**
**JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.**
**JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.**

## Serie 8 (40+10 Punkte)

### Aufgabe 1 (10+2 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen reeller Vektorräume sind linear?

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 \\ 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \end{pmatrix}.$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_3 \\ \xi_1 + 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = \xi_1 \cdot \xi_2.$

(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = 3x - \frac{1}{2}.$

(e)* $f : P_3 \to P_3, \qquad f\big(p(t)\big) = p'(t);$

hierbei sei $P_3$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich drei.

Begründen Sie alle Ihre Ergebnisse vollständig!

### Aufgabe 2 (10+4 Punkte)

Seien $V$ und $W$ reelle Vektorräume. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann linear, wenn die Gleichheit

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2 \in V$ erfüllt ist.

**Bitte wenden!**

(b) Eine Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann linear, wenn die Gleichheit

$$f\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(v_j)$$

für alle $\lambda_1 \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $v_1, \dots, v_n \in V$ $(n \geq 1)$ erfüllt ist.

(c) Ist $f : V \to W$ linear und sind die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ $(n \geq 1)$ linear abhängig, dann sind auch $f(v_1), \dots, f(v_n) \in W$ linear abhängig.

(d)* Ist $f : V \to W$ linear und injektiv und sind die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ $(n \geq 1)$ linear unabhängig, dann sind auch $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linear unabhängig.

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$ der beiden folgenden linearen Abbildungen:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 \end{pmatrix}.$

(b) $f : P_3 \longrightarrow P_3, \quad f\big(p(t)\big) = p'(t)$ $\qquad$ ($P_3$ vgl. Aufgabe 1).

Berechnen Sie die Größe $\dim_{\mathbb{R}} \ker(f) + \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{im}(f)$. Was stellen Sie fest?

**Aufgabe 4 (10+4 Punkte)**

(a) Geben Sie explizit eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft

$$f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

an. Zeigen Sie überdies, dass $f$ ein Isomorphismus ist.

(b)* Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, für die gilt:

$$\mathrm{im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz über die lineare Fortsetzung.