Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 07.06.2010 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 8 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Die Abbildung $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welche $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ den Vektor

$$x \times y := \begin{pmatrix} \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 \\ \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3 \\ \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

zuordnet, heißt *Vektorprodukt*. Weiter sei $\langle \cdot , \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $\times$ eine bilineare Abbildung ist, welche den folgenden Rechenregeln genügt (hierbei seien $x, y \in \mathbb{R}^3$):

$$\text{(i) } y \times x = -x \times y, \text{ insbesondere } x \times x = 0,$$
$$\text{(ii) } x \times y = 0 \Longleftrightarrow x, y \text{ sind linear abhängig.}$$

(b) Zeigen Sie, dass für $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die Beziehungen

$$\text{(i) } \langle x \times y, z \rangle = \det \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{(ii) } \langle x \times y, x \rangle = \langle x \times y, y \rangle = 0$$

gelten.

(c) Beweisen Sie für $x, y \in \mathbb{R}^3$ die Identität

$$||x \times y||^2 = ||x||^2 \cdot ||y||^2 - \langle x, y \rangle^2.$$

Zeigen Sie damit, dass für $x, y \neq 0$ mit dem Zwischenwinkel γ die Gleichheit

$$||x \times y|| = ||x|| \cdot ||y|| \cdot \sin(\gamma)$$

gilt. Interpretieren Sie dieses Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Es seien $f_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(j = 1, 2)$ Drehungen um die ξ_1-Achse bzw. die ξ_3-Achse des $\mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad f_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung $f_1 \circ f_2$ wieder eine Drehung ist.

(b) Bestimmen Sie die Matrix von $f_1 \circ f_2$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

(c) Bestimmen Sie die Drehachse von $f_1 \circ f_2$ sowie den Drehwinkel (im Bogenmaß).

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung O seien die Ortsvektoren

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Punkte O, A, B, C bilden die Eckpunkte eines Tetraeders.

(a) Zeigen Sie, dass es genau zwei lineare Abbildungen $g_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(j = 1, 2)$ mit

$$g_j(x) = A_j \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$$

für eine Matrix $A_j \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ gibt, welche das Tetraeder so auf sich selbst abbilden, dass $g_j(B) = C$ gilt. Geben Sie A_j $(j = 1, 2)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildungen g_1 und g_2 orthogonal sind. Ermitteln Sie alle Fixpunkte von g_1 und g_2.

(c) Sind die Abbildungen g_1, g_2 Drehungen? Bestimmen Sie ggf. die Drehachse sowie den Drehwinkel (im Bogenmaß).

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Es seien $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und $n \in V$ ein normierter Vektor. Zeigen Sie, dass die Spiegelung $s : V \to V$ an dem zu n senkrechten Unterraum $U \subset V$ durch die Vorschrift

$$s(x) = x - 2\langle x, n\rangle \cdot n \qquad (x \in V)$$

gegeben ist.

(b) Es seien $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ der $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und

$$n = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix der Spiegelung s an der zu n senkrechten Ebene E bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.