Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 03.01.2011 in der Vorlesung

Serie 8 (40 + 10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien ein Körper K und ein Polynom $f \in K[X]$ gegeben. Wir erinnern daran, dass ein *Zerfällungskörper von* f *über* K eine minimale (und somit endliche) Erweiterung E von K ist, welche sämtliche Nullstellen von f enthält.

(i) Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ ein Zerfällungskörper des Polynoms $f(X) = X^4 + 1$ über $\mathbb{Q}$ ist.

(ii) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper des Polynoms $f(X) = X^6 - 1$ über $\mathbb{Q}$.

(iii) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper des Polynoms $f(X) = X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jedes echte Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq R$ eines kommutativen Ringes R mit Einselement ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subsetneq R$ existiert, welches das Ideal $\mathfrak{a}$ enthält. Man beachte, dass damit insbesondere die Existenz von Maximalidealen in R bewiesen wird.
(*Hinweis:* Man betrachte die Menge $\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}} := \{\mathfrak{b} \,|\, \mathfrak{b} \subsetneq R$ echtes Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}\}$, welche bezüglich der Enthaltensrelation teilgeordnet ist, und wende das Lemma von Zorn auf die nicht-leere Menge $\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}$ an).

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Seien K ein Körper und $S := \{f \in K[X] \,|\, \deg(f) \geq 1\}$ die Menge der nicht-konstanten Polynome in $K[X]$. Weiter bezeichnen $(X_f)_{f \in S}$ ein durch S indiziertes Variablensystem und $R := K\big[(X_f)_{f \in S}\big]$ den dazugehörigen Polynomring über K.

(i) Zeigen Sie, dass das Ideal $\mathfrak{a} := \big(f(X_f),\ f \in S\big)$ ein echtes Ideal in R ist und somit nach Aufgabe 2 in einem Maximalideal $\mathfrak{m}$ von R enthalten ist.

(ii) Zeigen Sie, dass der Körper $E_1 := R/\mathfrak{m}$ eine algebraische Erweiterung von K ist, in dem jedes Polynom $f \in K[X]$ eine Nullstelle besitzt.

(iii) Durch Iteration dieses Verfahrens erhält man eine aufsteigende Kette $K = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ von Körpern. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $E := \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ ein *algebraischer Abschluss von* K ist, d.h. dass E eine algebraische Erweiterung von K ist und jedes Polynom $f \in E[X]$ eine Nullstelle in E besitzt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(i) Es sei E/K eine Galoiserweiterung mit $[E : K] = 21$ und nicht-zyklischer Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(E/K)$. Bestimmen Sie die Anzahl aller Zwischenkörper L von K und E. (*Hinweis:* Verwenden Sie den Hauptsatz der Galoistheorie und die Sylowsätze).

(ii) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$. Stellen Sie das resultierende System von Körpererweiterungen in einem Diagramm dar.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich ein regelmäßiges 7-Eck nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt.