HU Berlin Sommersemester 2011

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 06.06.2011 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 8 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Es seien G eine Gruppe und H, $K \trianglelefteq G$ Normalteiler in G mit $K \subseteq H$. Zeigen Sie: K ist Normalteiler in H, und es besteht die Gruppenisomorphie

$$(G/K)/(H/K) \cong G/H.$$

(b) Es seien W ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\{u, v, w\}$ und $U = \langle u \rangle$, $V = \langle u, v \rangle$ zwei Unterräume von W. Geben Sie für die Faktorräume W/V, W/U und V/U jeweils einen isomorphen Unterraum von W an und verifizieren Sie damit die in (a) gegebene Isomorphie.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $(H, \circ)$ eine kommutative und reguläre Halbgruppe sowie $\sim$ die auf $H \times H$ durch

$$(a,\, b) \sim (c,\, d) \Longleftrightarrow a \circ d = b \circ c \quad (a,\, b,\, c,\, d \in H)$$

definierte Äquivalenzrelation und $G := (H \times H)/\sim$. Zeigen Sie, dass die auf G durch

$$[a,\, b] \bullet [a',\, b'] := [a \circ a',\, b \circ b'] \qquad ([a,\, b],\, [a',\, b'] \in G)$$

definierte Verknüpfung assoziativ und kommutativ ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die kommutative Halbgruppe $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ regulär ist.

(b) Es bezeichne $(G, \circ)$ die aus $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ konstruierte, minimale, umfassende Gruppe. Beschreiben Sie die Elemente und die Gruppenstruktur von G. Welche Zahlbereichserweiterung liegt G zugrunde?

(c) Sind die Halbgruppen $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ zueinander isomorph? Sind die aus $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$ konstruierten Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und $(G, \circ)$ zueinander isomorph?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Wir definieren auf der Gruppe der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +)$, gegeben durch die Äquivalenzklassen $[a, b]$ mit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, eine Multiplikation durch

$$[a, b] \cdot [a', b'] := [aa' + bb', ab' + a'b] \quad (a, b, a', b' \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass diese Operation assoziativ und kommutativ ist und die beiden Distributivgesetze gelten.