Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Dr. Anna v. Pippich

Abgabetermin: 03.06.2013 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 8 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Wir definieren auf der Gruppe der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +)$, gegeben durch die Äquivalenzklassen $[a, b]$ mit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, eine Multiplikation durch

$$[a, b] \cdot [a', b'] := [aa' + bb', ab' + a'b] \quad (a, b, a', b' \in \mathbb{N}).$$

Zeigen Sie, dass diese Operation assoziativ und kommutativ ist und die beiden Distributivgesetze gelten.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Zeigen Sie, dass dann für $a, b, c \in R$ die folgenden Rechenregeln gelten:

(i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

(ii) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

(iv) $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$.

(v) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie jeweils alle Nullteiler von $(\mathcal{R}_{10}, \oplus, \odot)$, $(\mathcal{R}_{11}, \oplus, \odot)$ bzw. $(\mathcal{R}_{12}, \oplus, \odot)$. Zeigen Sie weiter: Ist n keine Primzahl, dann besitzt der Ring $(\mathcal{R}_n, \oplus, \odot)$ Nullteiler.

(b) Es seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins und $a \in R$, $a \neq 0$. Zeigen Sie: Ist $a^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $1 - a$ eine Einheit von R.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Wir definieren den *Polynomring* $(R[X], +, \cdot)$ *in der Variablen* X *mit Koeffizienten aus* R als die Menge

$$R[X] := \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \,\middle|\, a_j \in R,\ a_j = 0 \text{ für fast alle } j \in \mathbb{N} \right\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j\right) + \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \cdot X^j\right) := \sum_{j \in \mathbb{N}} (a_j + b_j) \cdot X^j,$$
$$\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j\right) \cdot \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \cdot X^j\right) := \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\substack{k, \ell \in \mathbb{N} \\ k + \ell = j}} (a_k \cdot b_\ell) \right) \cdot X^j.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(R[X], +, \cdot)$ ein Ring ist.

(b) Beweisen Sie, dass $R[X]$ genau dann kommutativ ist, wenn R kommutativ ist.

(c) Weisen Sie nach, dass die Einheiten von $R[X]$ genau den Einheiten von R entsprechen, falls R sogar ein Integritätsbereich mit Einselement ist.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Der Ring $(n\mathbb{Z}, +, \cdot)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt, ist ein Unterring von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(b) Der Ring $(\mathcal{R}_n, \oplus, \odot)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt, ist ein Unterring von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(c) Es seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $a \in R$. Dann ist der Ring $(aR, +, \cdot)$ ein Unterring von $(R, +, \cdot)$.

(d) Es sei

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a,\, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dann ist $(U,\, +,\, \cdot)$ ein Unterring von $(\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}),\, +,\, \cdot)$.