HU Berlin Wintersemester 2013/14

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 09.12.2013 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 8 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien U_1 und U_2 Unterräume eines reellen Vektorraums V. Die Summe $U_1 + U_2$ heißt *direkt*, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt. Man schreibt in diesem Fall auch $U_1 \oplus U_2$.

(a) Es seien $\{b_1, \dots, b_m\}$ eine Basis von U_1 und $\{c_1, \dots, c_n\}$ eine Basis von U_2.
Zeigen Sie:
Die Summe $U_1 + U_2$ ist genau dann direkt, wenn die Menge $\{b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n\}$ eine Basis von $U_1 + U_2$ ist.

(b) Betrachten Sie im $\mathbb{R}^3$ den Unterraum

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 - 3\xi_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Finden Sie einen Unterraum $U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^3$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Betrachten Sie im reellen Vektorraum V_3 der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner oder gleich drei die Polynome

$$\begin{aligned} p_j(X) &= (1 - X)^j \qquad (j = 0, 1, 2, 3), \\ q_1(X) &= X^2 - X, \\ q_2(X) &= X^3 - 1. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie die Koordinaten von q_1 und q_2 bezüglich der geordneten Basis $\mathfrak{B} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ an (es darf vorausgesetzt werden, dass $\mathfrak{B}$ eine Basis ist).

(b) Beweisen Sie, dass q_1, q_2 linear unabhängig sind und ergänzen Sie die Menge $\{q_1, q_2\}$ durch Elemente von $\mathfrak{B}$ zu einer Basis von V_3.

Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass drei Vektoren der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \eta \\ \eta^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix}$ mit $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}$ genau dann eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, wenn $\xi \neq \eta$, $\xi \neq \zeta$, $\eta \neq \zeta$ gilt.

(b) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der durch $\xi = 0$, $\eta = 1$, $\zeta = 2$ gegebenen Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Teil (a).

Aufgabe 4 (10 Punkte)

In einem n-dimensionalen reellen Vektorraum V seien k Unterräume $U_1, \ldots, U_k$ der Dimension $n-1$ gegeben ($k \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie:

$$\dim(U_1 \cap \ldots \cap U_k) \geq n - k.$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion nach k.