

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 08.12.2015 in der Vorlesung

Bitte beachten:

JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.

JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 8 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ sei durch die Vorschrift

$$p(X) \mapsto p'(X) - p(1) + p(0)$$

gegeben.

- (a) Bestimmen Sie den Rang $\text{rg}(f)$ von f .
- (b) Stellen Sie die Matrix A von f bezüglich der geordneten Basen $\mathfrak{B} = \{X^3 - 1, X^2 + X, X^3 - X^2, X^3\}$ von $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ und $\mathfrak{C} = \{1, X, X^2\}$ von $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ auf. Bestimmen Sie Zeilen- und Spaltenrang von A .
- (c) Es seien nun K ein beliebiger Körper, U, V, W drei K -Vektorräume und $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g)).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, die durch $f\left(\begin{pmatrix} 5i \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ eindeutig als lineare Fortsetzung festgelegt ist.

- (a) Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.
- (b) Geben Sie die Matrix von f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{C}^2$ an.
- (c) Finden Sie geordnete Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ von $\mathbb{C}^2$, so dass die Matrix A von f bezüglich $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die Gestalt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

- (a) Es seien K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Zeigen Sie, dass der Vektorraum $L(K, V)$ isomorph zu V ist.
- (b) Es seien V, W endlich-dimensionale K -Vektorräume mit $\dim_K V = \dim_K W$ und $f \in L(V, W)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:
 - (i) f ist injektiv, d.h. ein Monomorphismus.
 - (ii) f ist surjektiv, d.h. ein Epimorphismus.
 - (iii) f ist bijektiv, d.h. ein Isomorphismus.