HU Berlin Wintersemester 2009/10

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 14.12.2009 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 9 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $f : U \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen U und V.

(a) Zeigen Sie: Das Bild $\operatorname{im}(f) \subseteq V$ ist ein linearer Unterraum von V.

(b) Sei W ein weiterer $\mathbb{R}$-Vektorraum und $g : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass die Hintereinanderausführung

$$g \circ f : U \longrightarrow W,$$

gegeben durch die Zuordnung

$$u \mapsto g(f(u)) \quad (u \in U),$$

ebenfalls eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Eine Folge $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ heißt *arithmetisch*, wenn es ein $\delta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\alpha_{j+1} - \alpha_j = \delta$$

für alle $j \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass die arithmetischen Folgen einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V_a bilden.

(b) Zeigen Sie weiter, dass V_a isomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.

Hinweis zu (b): Geben Sie eine lineare Abbildung $f : V_a \to \mathbb{R}^2$ an, welche bijektiv ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5\xi_2 \\ -2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die linearen Unterräume

$$\ker(f),\ \mathrm{im}(f),\ \ker(f) \cap \mathrm{im}(f),\ \ker(f) + \mathrm{im}(f)\,.$$

Geben Sie weiter die Zuordnungsvorschrift an, welche die Abbildung $f \circ f$ beschreibt, und bestimmen Sie $\ker(f \circ f)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie die beiden folgenden Äquivalenzen:

$$\ker(f) + \mathrm{im}(f) = V \Longleftrightarrow \ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{0\} \Longleftrightarrow \ker(f \circ f) = \ker(f).$$