Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 10.01.2011 in der Vorlesung

Serie 9 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (30 Punkte)

Bestimmen Sie alle Untergruppen der symmetrischen Gruppe S_4 zu vier Elementen. Erstellen Sie ein Diagramm, welches alle Inklusionsrelationen der auftretenden Untergruppen wiedergibt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien E eine Galoiserweiterung über K und $G = \mathrm{Gal}(E/K)$ die zugehörige Galoisgruppe. Weiter seien

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \{L \mid K \subseteq L \subseteq E, \text{ Zwischenkörper}\},\\ \mathcal{G} &= \{H \mid H \leq G, \text{ Untergruppe}\}.\end{aligned}$$

Nach dem Haupsatz der Galoistheorie besteht eine bijektive Zuordnung $\varphi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{G}$, gegeben durch

$$\varphi(L) = G^L = \mathrm{Gal}(E/L).$$

Seien nun $L_j \in \mathcal{K}$ und $H_j = \varphi(L_j) \in \mathcal{G}$ $(j = 1, 2)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $L_1 \subseteq L_2 \Longleftrightarrow H_1 \supseteq H_2$.

(ii) $\varphi(L_1 \cdot L_2) = H_1 \cap H_2$.
(Hierbei bezeichnet $L_1 \cdot L_2$ das *Kompositum von L_1 mit L_2*, d.h. den kleinsten Unterkörper von E, der L_1 und L_2 umfasst.)

(iii) Für $L \in \mathcal{K}$ und $\sigma \in G$ besteht die Gleichheit $\mathrm{Gal}(E/\sigma(L)) = \sigma \circ \mathrm{Gal}(E/L) \circ \sigma^{-1}$.