HU Berlin Sommersemester 2011

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 15.06.2011 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 9 (40+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Ordnungsrelation „$<$" auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ die beiden folgenden Regeln erfüllt:

(a) Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt mit $a < b$ auch $a + c < b + c$.

(b) Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt mit $a < b$ die Ungleichung

$$a \cdot c < b \cdot c, \text{ falls } c > 0, \quad \text{bzw.} \quad a \cdot c > b \cdot c, \text{ falls } c < 0.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Beweisen Sie die Gültigkeit der Division mit Rest im Bereich der ganzen Zahlen, d.h. gegeben a, $b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$, dann existieren eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < |b|$, so dass die Gleichung

$$a = q \cdot b + r$$

besteht.

Hinweis: Es darf die Gültigkeit der Division mit Rest im Bereich der natürlichen Zahlen vorausgesetzt werden.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$, nicht beide zugleich 0, und $d = (a, b)$. Beweisen Sie, dass ganze Zahlen x, y mit der Eigenschaft existieren, dass

$$x \cdot a + y \cdot b = d$$

gilt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Menge der Linksnebenklassen von $\mathbb{Z}$ nach $n\mathbb{Z}$. Mit der Schreibweise $\overline{a} := a + n\mathbb{Z}$ ($a \in \mathbb{Z}$) wird durch

$$\overline{a} \circ \overline{b} := \overline{a \cdot b} \qquad (a, b \in \mathbb{Z})$$

eine assoziative und kommutative Verknüpfung auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ definiert.

(a) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\backslash\{\overline{0}\}, \circ)$ genau dann eine Gruppe ist, wenn n eine Primzahl ist.

(b) Es sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\backslash\{\overline{0}\}, \circ)$ zu $(\mathcal{R}_p\backslash\{0\}, \odot)$ isomorph ist.

(c) Es sei p eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Lagrange, dass die Teilbarkeitsbeziehung

$$p \,|\, (a^p - a)$$

gilt.

Hinweis: Betrachten Sie für $p \nmid a$ die Ordnung von $\overline{a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\backslash\{\overline{0}\}$.

Aufgabe 5* (10 Punkte)

Beweisen Sie unter Verwendung des Euklidischen Lemmas für ganze Zahlen die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung für eine ganze Zahl $a \neq 0$ mit Hilfe vollständiger Induktion.