HU Berlin Sommersemester 2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra / Zahlentheorie

Dr. Anna v. Pippich

Abgabetermin: 10.06.2013 vor der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 9 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, +, \cdot)$ Ringe mit Einselement 1_R bzw. 1_S. Weiter sei

$$f : (R, +_R, \cdot_R) \longrightarrow (S, +_S, \cdot_S)$$

ein Ringhomomorphismus, der nicht der Nullhomomorphismus ist.

(a) Geben Sie ein Beispiel für f, sodass $f(1_R) \neq 1_S$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Gilt $f(1_R) \neq 1_S$, dann ist $f(1_R)$ ein Nullteiler von S.

(c) Zeigen Sie: Gilt $f(1_R) = 1_S$, dann ist für jede Einheit a von R das Element $f(a)$ eine Einheit von S und es gilt $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es seien $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring und $a \in R$. Zeigen Sie, dass das sogenannte Hauptideal

$$(a) := \{a \cdot r \mid r \in R\}$$

in der Tat ein Ideal von R ist.

(b) Ein Integritätsbereich $(R, +, \cdot)$ mit Einselement 1 heißt *Hauptidealring*, falls jedes Ideal von R ein Hauptideal ist. Untersuchen Sie, ob die Ringe

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot) \quad \text{bzw.} \quad (\mathbb{Z}[X], +, \cdot)$$

Hauptidealringe sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein nullteilerfreier Ring mit Einselement 1. Die *Charakteristik* $\mathrm{char}(R)$ *von* R ist die minimale, positive, natürliche Zahl n mit $n \cdot 1 = 0$, falls ein solches n existiert. Falls kein solches n existiert, so setzen wir $\mathrm{char}(R) := 0$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\mathrm{char}(R) = 0$ oder $\mathrm{char}(R) = p$ für ein $p \in \mathbb{P}$.

(b) Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \operatorname{char}(R) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad R \text{ hat einen Unterring } (S, +, \cdot) \text{ mit } (S, +, \cdot) \cong (\mathbb{Z}, +, \cdot). \\ \operatorname{char}(R) = p \quad &\Longleftrightarrow \quad R \text{ hat einen Unterring } (S, +, \cdot) \text{ mit } (S, +, \cdot) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \oplus, \odot). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es seien $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement und $\mathfrak{a} \subsetneq R$ ein echtes Ideal. Das Ideal $\mathfrak{a}$ heißt *Primideal*, wenn für alle $r, s \in R$ aus $r \cdot s \in \mathfrak{a}$ stets $r \in \mathfrak{a}$ oder $s \in \mathfrak{a}$ folgt. Das Ideal $\mathfrak{a}$ heißt *maximal*, wenn R das einzige Ideal ist, das $\mathfrak{a}$ echt umfasst. Zeigen Sie:

(a) Der Faktorring $R/\mathfrak{a}$ ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist.

(b) Der Faktorring $R/\mathfrak{a}$ ist genau dann ein Körper, wenn $\mathfrak{a}$ maximal ist.

(c) Jedes maximale Ideal ist ein Primideal.

(d) Der Ring R ist genau dann ein Körper, wenn (0) das einzige maximale Ideal ist.