HU Berlin Wintersemester 2013/14

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 16.12.2013 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 9 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Die affine Ebene E des $\mathbb{R}^3$ sei in Koordinatenform gegeben durch

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 3 \right\};$$

die affine Gerade G des $\mathbb{R}^3$ sei in Parameterform gegeben durch

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Geben Sie E in Parameterform und G in Koordinatenform an.

(b) Schreiben Sie E, G und $E \cap G$ jeweils als affine Unterräume der Form $\mathbb{A}(W) = v + W$ mit einem Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ und einem linearen Unterraum $W \subseteq \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Addition auf V ist durch

$$(f + g)(\xi) := f(\xi) + g(\xi) \quad (f, g \in V;\ \xi \in \mathbb{R})$$

und die Skalarmultiplikation durch

$$(\lambda \cdot f)(\xi) := \lambda \cdot f(\xi) \quad (f \in V;\ \lambda, \xi \in \mathbb{R})$$

gegeben. Es seien ξ_0 und γ reelle Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Die Teilmenge $V_0 := \{f \in V \mid f(\xi_0) = 0\} \subseteq V$ ist ein linearer Unterraum von V.

(b) Die Teilmenge $V_\gamma := \{f \in V \mid f(\xi_0) = \gamma\} \subseteq V$ ist ein affiner Unterraum von V.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Wir betrachten im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ die Menge L aller n-Tupel

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

welche das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{1,1}\xi_1 & + & \alpha_{1,2}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{1,n}\xi_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{2,1}\xi_1 & + & \alpha_{2,2}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{2,n}\xi_n & = & \beta_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ \alpha_{m,1}\xi_1 & + & \alpha_{m,2}\xi_2 & + & \dots & + & \alpha_{m,n}\xi_n & = & \beta_m \end{array} \qquad (S)$$

lösen ($\alpha_{j,k} \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$ mit $j = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, n$).
Zeigen Sie: Ist das Gleichungssystem (S) lösbar, so ist L ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Welche der folgenden Abbildungen reeller Vektorräume sind linear? Begründen Sie.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 \\ 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \end{pmatrix}$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_3 \\ \xi_1 + 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\quad f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 \cdot \xi_2 \\ \xi_1 - \xi_2 \end{pmatrix}$.

(d) $f : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(g) = g(5)$, $\quad (g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.

(e) $f : V_2 \longrightarrow V_2$, $\quad f\big(\alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0\big) = \alpha_1 X$.

(f) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}\right) = 11\xi_1 + 121\xi_2$.

Hierbei bezeichnet V_2 den Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 mit reellen Koeffizienten. Der Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ wurde in Aufgabe 2 definiert.

Erinnerung: Der bettermarks-Test für die Klausurzulassung ist vom 04.12.2013 bis zum 18.12.2013 online. Sie finden ihn über den Button „Schule“.