

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 15.12.2015 in der Vorlesung

Bitte beachten:

JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.

JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 9 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Gegeben seien die folgenden Matrizen mit reellen Einträgen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Produkte $A_j \cdot A_k$ ($j, k = 1, \dots, 5$), sofern diese definiert sind.

(b) Es sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die Matrixmultiplikation assoziativ ist, d.h. dass für $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,r}(K)$, $C \in M_{r,s}(K)$ ($m, n, r, s \in \mathbb{N}$) die Gleichheit $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ besteht.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei K ein Körper. Eine Matrix $A = (\alpha_{k,j}) \in M_n(K)$ ($n \in \mathbb{N}$) heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls für alle Einträge $\alpha_{k,j}$ ($k, j = 1, \dots, n; k > j$) die Gleichheit $\alpha_{k,j} = 0$ gilt.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der Matrixmultiplikation, dass das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen $A, B \in M_n(K)$ wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass eine obere Dreiecksmatrix $A \in M_n(K)$ in $GL_n(K)$ liegt.

(c) Berechnen Sie alle Potenzen $A^k := \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-mal}}$ ($k \in \mathbb{N}$) der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_2).$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Als *magische Quadrate der Ordnung n* bezeichnen wir alle Matrizen $A = (\alpha_{k,j}) \in M_n(\mathbb{R})$, für die die Summe der Einträge aller Zeilen, aller Spalten und der beiden Hauptdiagonalen gleich ist (die so genannte *magische Summe s* des Quadrats).

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge aller magischen Quadrate der Ordnung n einen Unterraum von $M_n(\mathbb{R})$ bildet.
- (b) Bestimmen Sie die Dimension des Vektorraums der magischen Quadrate der Ordnung 3, indem Sie eine Basis dieses Raumes angeben.
- (c) Ein magisches Quadrat der Ordnung 3 mit magischer Summe s hat noch weitere Eigenschaften, beispielsweise gilt:
 - (i) Die Summe der vier Eckzahlen $\alpha_{1,1} + \alpha_{1,3} + \alpha_{3,1} + \alpha_{3,3}$ beträgt $\frac{4}{3}s$.
 - (ii) Die Summe der ersten beiden Einträge der obersten und der letzten beiden Einträge der untersten Zeile $\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2} + \alpha_{3,2} + \alpha_{3,3}$ beträgt ebenfalls $\frac{4}{3}s$.

Beweisen Sie diese Eigenschaften für alle magischen Quadrate der Ordnung 3, indem Sie sie für Ihre Basis aus (b) verifizieren und dann zeigen, dass diese Eigenschaften bei Bildung von Linearkombinationen erhalten bleibt.