HU Berlin Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 21.06.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 9 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Bahnen folgender Operationen einer Gruppe G auf einer Menge M und entscheiden Sie, ob die Operationen transitiv sind.

(a) $G = ((\mathbb{C}^\times)^2, \cdot)$ auf $M = \mathbb{C}^2$ mit $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\alpha_1 \cdot \xi_1\\\alpha_2 \cdot \xi_2\end{pmatrix}$.

(b) $G = (G, \circ)$ auf $M = G$ mit $g \bullet g' := g \circ g'$.

(c) $G = (\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \cdot)$ auf $M = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ mit $A \bullet B := A^{-1} \cdot B \cdot A$.

(d) $G = (S_3, \circ)$ auf $M = S_3$ mit $\sigma \bullet \tau := \sigma^{-1} \circ \tau \circ \sigma$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Finden Sie für die folgenden Mengen M_j einen geeigneten K-Vektorraum V_j und eine Gruppenwirkung $\bullet$, so dass M_j dadurch ein affiner Raum mit zugehörigem Vektorraum V_j wird. Bestimmen Sie dessen Dimension.

(a) $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix}7\\-2\\5\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}4\\1\\13\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q} \right\}$.

(b) $M_2 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \mid f'(x) - f(x) = \cos(x)\}$.

(c) $M_3 = \left\{ \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{pmatrix} \in (\mathbb{F}_5)^3 \;\middle|\; \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \right\}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Eine Gruppe $(G, \circ)$ operiere auf einer Menge M.

(a) Zeigen Sie, dass M eine disjunkte Vereinigung von G-Bahnen ist.

(b) Beweisen Sie, dass der Stabilisator G_m eines Elements $m \in M$ eine Untergruppe von G ist.

(c) Die Stabilisatoruntergruppe G_m wirkt auf G durch die Zuordung $h \bullet g = h \circ g$. Wir bezeichnen mit

$$G/G_m := \{G_m \bullet g \mid g \in G\}$$

die Menge der G_m-Bahnen. Zeigen Sie, dass alle G_m-Bahnen gleichmächtig sind, dass also $|G_m \bullet g| = |G_m \bullet g'|$ $(g, g' \in G)$ gilt.

(d) Zeigen Sie: Ist die Wirkung von G auf M transitiv, so gibt es eine Bijektion zwischen M und der Menge der G-Bahnen G/G_m, wobei G_m die Stabilisatoruntergruppe zu (irgendeinem) $m \in M$ ist.

(e) Es sei nun G eine endliche Gruppe. Folgern Sie aus (c) und (d), dass dann die Ordnung $|G \bullet m|$ der Bahn eines Elements $m \in M$ die Gruppenordnung $|G|$ teilt.