HU Berlin Sommersemester 2014

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 23.04.2014 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 1 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Stellen Sie die Permutationen $\pi_1, \pi_2 \in S_6$, welche durch die Zuordnungsvorschriften

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, als Produkt von Transpositionen dar. Geben Sie zudem die Zuordnungsvorschrift für die folgenden Permutationen an:

$$\pi_3 := \pi_1 \circ \pi_2, \quad \pi_4 := \pi_2 \circ \pi_1, \quad \pi_5 := \pi_1^{-1}, \quad \pi_6 := \pi_2^{-1}.$$

Bestimmen Sie weiter das Signum $\operatorname{sgn}(\pi_j)$ für $j = 1, \ldots, 6$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\},$$

gegeben durch die Zuordnung $\pi \mapsto \operatorname{sgn}(\pi)$, ein *Homomorphismus* von Gruppen ist, d.h. dass die Gleichheit

$$\operatorname{sgn}(\pi_1 \circ \pi_2) = \operatorname{sgn}(\pi_1) \cdot \operatorname{sgn}(\pi_2) \quad (\pi_1, \pi_2 \in S_n)$$

besteht. Folgern Sie daraus, dass für $\pi \in S_n$ die Gleichheit $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)$ gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Berechnen Sie geschickt die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 9 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ und $A^t \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ die zu A transponierte Matrix. Beweisen Sie, dass

$$\det(A) = \det(A^t)$$

gilt.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Die Matrix der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist bezüglich der Standardbasis gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\ker(f)$ und $\mathrm{im}(f)$. Ist f injektiv bzw. surjektiv?

(b) Geben Sie mit Hilfe von (a) die Determinante von A an, ohne sie zu berechnen.

(c) Bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.