HU Berlin Sommersemester 2014

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 28.04.2014 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 2 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Fläche F des von x und y aufgespannten Parallelogramms durch

$$F = \left| \det \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} \right|$$

gegeben ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Die Abbildung $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welche $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ den Vektor

$$x \times y := \begin{pmatrix} \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 \\ \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3 \\ \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

zuordnet, heißt *Vektorprodukt*. Es seien nun $x, x', y, y', z \in \mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $\times$ eine bilineare antikommutative Abbildung ist. Hierbei bedeutet *bilinear*, dass für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ die Gleichheiten

$$(\lambda x + \mu x') \times y = \lambda(x \times y) + \mu(x' \times y) \quad \text{und}$$
$$x \times (\lambda y + \mu y') = \lambda(x \times y) + \mu(x \times y')$$

gelten, und *antikommutativ*, dass die Beziehung

$$y \times x = -x \times y \;\; (\text{insbesondere } x \times x = 0)$$

besteht.

(b) Beweisen Sie die Äquivalenz

$$x \times y = 0 \iff x, y \text{ linear abhängig.}$$

(c) Überprüfen Sie, ob das Assoziativgesetz

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$$

erfüllt ist.

Aufgabe 3 (10+10 Punkte)

Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen reellen Vektorräumen. Weiterhin seien $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $\mathcal{B}' = \{b'_1, \ldots, b'_n\}$ geordnete Basen von V und $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$, $\mathcal{C}' = \{c'_1, \ldots, c'_m\}$ geordnete Basen von W.
Es bezeichne $S = (\sigma_{k,j})_{k,j=1,\ldots,n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die *Basistransformationsmatrix* von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ und $T = (\tau_{l,r})_{l,r=1,\ldots,m} \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ die *Basistransformationsmatrix* von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}'$, also

$$b'_j = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{k,j} b_k \qquad (j = 1, \ldots, n),$$
$$c'_r = \sum_{l=1}^{m} \tau_{l,r} c_l \qquad (r = 1, \ldots, m).$$

Schließlich sei $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ die Matrix von f bzgl. $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ und $A' \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ die Matrix von f bzgl. $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$.

(a) Beweisen Sie die Formel
$$A' = T^{-1} A S.$$

(b)* Es seien nun $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung und

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{bzw.} \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \ \mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

geordnete Basen des $\mathbb{R}^2$. Die Matrix A von f bzgl. $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sei durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Matrizen S und T aus (a) sowie die Matrix A' von f bzgl. $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ und bestätigen Sie die in (a) bewiesene Relation.