HU Berlin Sommersemester 2014

# Übungsaufgaben zur Vorlesung

# Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 12.05.2014 in der Vorlesung

**Bitte beachten:**
**JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.**
**JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.**

## Serie 4 (40 Punkte)

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Die reellen Matrizen $A_1, A_2 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ seien gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte von $A_1$ und $A_2$, ihre algebraische und geometrische Vielfachheit sowie Basen der zugehörigen Eigenräume.

(b) Betrachten Sie nun die komplexe Matrix $A_3 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, gegeben durch

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1-i & -2-2i & -1-i \\ -i & 0 & -1 \\ 1+i & 2+2i & 1+i \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A_3$, ihre algebraische und geometrische Vielfachheit sowie Basen der zugehörigen Eigenräume.

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $p_A(t)$ von $A$ ein Polynom vom Grad $n$ ist, d.h.

$$p_A(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$a_n = (-1)^n, \quad a_{n-1} = (-1)^{n-1} \mathrm{tr}(A), \quad a_0 = \det(A)$$

gilt. Hierbei ist die Spur $\operatorname{tr}(A)$ von $A = (\alpha_{j,k})_{j,k=1,\dots,n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ die Summe der Diagonaleinträge von $A$, d.h.

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,j}.$$

(c) Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von $A$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j, \quad \det(A) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Es sei $V_3$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 mit reellen Koeffizienten. Die zweite Ableitung eines Polynoms $p(X) = \sum\limits_{j=0}^{3} \alpha_j X^j$ ist durch $p''(X) = \sum\limits_{j=2}^{3} j(j-1)\alpha_j X^{j-2}$ gegeben. Die lineare Abbildung

$$f : V_3 \longrightarrow V_3,$$

sei gegeben durch die Zuordnung $p(X) \mapsto p''(X)$. Berechnen Sie die Eigenwerte von $f$, ihre algebraische und geometrische Vielfachheit sowie die dazugehörigen Eigenräume.

**Aufgabe 4 (10 Punkte)**

Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\operatorname{rg}(A) < n$ genau dann, wenn 0 ein Eigenwert von $A$ ist.

(b) Wenn $\lambda$ Eigenwert von $A$ ist, dann ist $\lambda^k$ Eigenwert von $A^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Folgt auch umgekehrt aus der Eigenschaft „$\lambda^{k_0}$ ist Eigenwert von $A^{k_0}$ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$“, dass $\lambda$ Eigenwert von $A$ ist?

(c) Wenn $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist jeder Eigenwert von $A$ gleich 0.