HU Berlin Sommersemester 2014

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 19.05.2014 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 5 (40+5 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Die komplexe Matrix $A_1 \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ und die reellen Matrizen $A_2, A_3 \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ seien gegeben durch

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+i \\ 1 & 0 & 1 \\ 1+i & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob die Matrizen A_j $(j = 1, 2, 3)$ diagonalisierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, so dass $S^{-1} \cdot A_j \cdot S$ diagonal ist.

Aufgabe 2 (10+5 Punkte)

Es sei $f_A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ die durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gegebene lineare Abbildung.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenvektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.

(b) Welches ist die Matrix A' von f_A bzgl. dieser Basis? Bestimmen Sie $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

(c) Benutzen Sie (b), um A^n für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen!

(d)* Wenden Sie (c) auf folgendes Problem an: Die Fibonacci-Folge $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ist definiert durch $\xi_1 = \xi_2 = 1$ und $\xi_{n+1} = \xi_n + \xi_{n-1}$. Geben Sie eine explizite Formel für ξ_n an und berechnen Sie ξ_{10} und ξ_{20}.

Hinweis: Man schreibe die Rekursionsrelation als Matrixgleichung für $\begin{pmatrix} \xi_n \\ \xi_{n+1} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \\ \alpha+1 & \alpha+1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $p_A(t)$ von A gegeben ist durch

$$p_A(t) = -(t+1)(t-1)(t-\alpha).$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A diagonalisierbar?

(c) Sei $\alpha = 0$. Bestimmen Sie $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ so, dass die Matrix $S^{-1} \cdot A \cdot S$ diagonal ist. Berechnen Sie das Produkt $S^{-1} \cdot A \cdot S$ explizit.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Es sei $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass A mindestens einen reellen Eigenwert hat.

(b) Die Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ besitze λ als einzigen Eigenwert. Zeigen Sie, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn A von der Form $A = \lambda \cdot E$ ist.

(c) Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine lineare Abbildung $P : V \longrightarrow V$ heißt *Projektion*, falls $P^2 = P$ gilt. Zeigen Sie, dass eine Projektion P nur die Eigenwerte 0 oder 1 hat.