HU Berlin Sommersemester 2014

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 26.05.2014 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 6 (40 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es bezeichne V_3 den Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 mit reellen Koeffizienten und $p''(X)$ die zweite Ableitung des Polynoms $p(X)$. Die lineare Abbildung $f : V_3 \longrightarrow V_3$ sei gegeben durch die Vorschrift

$$f\big(p(X)\big) = (X^2 + X + 1) \cdot p''(X).$$

Zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Zerlegung von V_3 in Eigenräume von f.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Im Folgenden seien $A = (\alpha_{k,j})_{k,j=1,\ldots,n}$ und $B = (\beta_{k,j})_{k,j=1,\ldots,n}$ zwei reelle $n \times n$-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\|A\|_\infty := n \cdot \max\{|\alpha_{k,j}|\}_{k,j=1,\ldots,n}$ eine *Norm* (s. Analysis) auf dem reellen Vektorraum $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ definiert wird.

(b) Beweisen Sie die Ungleichung $\|A \cdot B\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$.

(c) Benutzen Sie (b), um zu zeigen, dass die Reihe $\exp(A) := \sum_{\ell=0}^{\infty} A^\ell/\ell!$ für alle $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ einen Grenzwert in $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ besitzt.

Hinweis: Sie können verwenden, dass $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ vollständig ist. Es ist somit zu zeigen, dass die Partialsummen $A_m := \sum_{\ell=0}^{m} A^\ell/\ell!$ $(m \in \mathbb{N})$ eine Cauchyfolge bilden.

(d) Es sei S eine reguläre Matrix. Zeigen Sie, dass $\exp(S^{-1} \cdot A \cdot S) = S^{-1} \cdot \exp(A) \cdot S$ gilt.

(e) Es sei A eine diagonalisierbare Matrix. Berechnen Sie $\exp(A)$ mit Hilfe der Eigenwerte und einer Basis aus Eigenvektoren.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p_A(t)$ und das Minimalpolynom $m_A(t)$ von A .

(b) Berechnen Sie die Eigenräume und die Haupträume von A.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Es sei $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) A ist invertierbar genau dann, wenn $p_A(0) \neq 0$ gilt.

(b) A ist invertierbar genau dann, wenn $m_A(0) \neq 0$ gilt.

(c) Es sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Berechnen Sie die Inverse von A als Polynom in A.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Cayley-Hamilton.

(d) Berechnen Sie die Inverse von
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$
mit der in (c) entwickelten Methode.