HU Berlin Sommersemester 2014

# Übungsaufgaben zur Vorlesung
# **Lineare Algebra und Analytische Geometrie II**

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 11.06.2014 in der Vorlesung

**Bitte beachten:**
**JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.**
**JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.**

## Serie 8 (40 Punkte)

### Aufgabe 1 (10 Punkte)

Für $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle x, y \rangle := \xi_1\eta_1 + 3\xi_2\eta_2 + 4\xi_3\eta_3 + \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 + \xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1 + \xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert. Bestimmen Sie die Gram'sche Matrix bezüglich der Standardbasis und bezüglich der geordneten Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie eine bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ orthogonale Basis für den Unterraum $< b_1, b_2 >$. Ergänzen Sie diese zu einer orthogonalen Basis des $\mathbb{R}^3$.

### Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $V_4$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 4.

(a) Zeigen Sie, dass für $p, q \in V_4$ durch

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(X)q(X)\,\mathrm{d}X$$

ein Skalarprodukt auf $V_4$ definiert wird.

(b) Berechnen Sie bezüglich dieses Skalarprodukts die Winkel zwischen den Polynomen 1 und $X$, $X$ und $X^2$, $X^2$ und $X^3$ sowie $X^3$ und $X^4$.

(c) Wenden Sie das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf die Basis $\{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ an.

**Aufgabe 3 (10 Punkte)**

Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Der Abstand zweier affiner Unterräume $A, A' \subseteq V$ ist durch $d(A, A') := \inf_{P\in A,\, P'\in A'} \|\overrightarrow{PP'}\|$ definiert.

(a) Für $x = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei durch

$$\langle x, y\rangle := \xi_1\eta_1 + 2\xi_1\eta_2 + 2\xi_2\eta_1 + 5\xi_2\eta_2$$

ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ definiert. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ zu der Geraden $\left\langle\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(b) Wir betrachten nun $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Die windschiefen Geraden $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ seien durch

$$G_1 = \{v_1 + \lambda w_1 |\, \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad G_2 = \{v_2 + \mu w_2 |\, \mu \in \mathbb{R}\}$$

mit $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Bestimmen Sie mittels Differentialrechnung eine Formel für $d(G_1, G_2)$.
Zeigen Sie weiter, dass der Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ der Punkte $P_1 \in G_1$, $P_2 \in G_2$, für die das Infimum angenommen wird, senkrecht auf den Richtungsvektoren der beiden Geraden steht.

**Aufgabe 4 (10 Punkte)**

(a) Es seien $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$. Für welche Matrizen $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ definiert $\langle x, y\rangle_A := \langle Ax, Ay\rangle$ ebenfalls ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$?

(b) Für $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sei $\|A\|_2$ gegeben durch

$$\|A\|_2^2 := \max_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\langle Ax, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle}.$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_2$ eine Norm auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ definiert.

(c) Berechnen Sie $\|A\|_2$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

*Hinweis*: Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $A^tA$ und stellen Sie $x \in \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser Basis dar.