HU Berlin Sommersemester 2014

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 16.06.2014 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe versehen.

Serie 9 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es bezeichne

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, S^{-1} = S^t\}$$

die Menge der orthogonalen Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

(b) Beweisen Sie, dass für $S \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ die Beziehung $\det(S) = \pm 1$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass eine Matrix S genau dann orthogonal ist, wenn ihre Zeilen- oder Spaltenvektoren bezüglich des Standardskalarprodukts des $\mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein linearer Unterraum. Das *orthogonale Komplement $U^\perp$ von U* ist durch $U^\perp := \{v \in V | \langle v, u\rangle = 0,\, \forall u \in U\}$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $U^\perp$ ein linearer Unterraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichheit
$$V = U \oplus U^\perp$$
gilt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Eine orthogonale Abbildung $f \in \mathrm{O}(V)$ heißt *Drehung*, wenn für die Matrix S von f bzgl. $\mathcal{B}$ die Gleichheit $\det(S) = 1$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der Drehungen eine Untergruppe von $\mathrm{O}(V)$ bildet.

(b) Es sei $V = \mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt. Zeigen Sie, dass jede Drehung $f \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^3)$ eine *Drehachse* besitzt, es also einen 1-dimensionalen linearen Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$ gibt, so dass $f(u) = u$ für alle $u \in U$ gilt.

(c) Es seien $f_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(j = 1, 2)$ Drehungen um die ξ_1-Achse bzw. die ξ_3-Achse des $\mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad f_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrizen von f_1 und f_2 bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Drehachse sowie den Drehwinkel (im Bogenmaß) der Drehung $f_1 \circ f_2$.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

Auf V_1, dem Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 1, sei ein Skalarprodukt durch

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(X)q(X)\,\mathrm{d}X$$

definiert. Die lineare Abbildung $f : V_1 \longrightarrow V_1$ sei durch

$$f(1) = 1 + \alpha X, \quad f(X) = \beta + \gamma X$$

gegeben. Für welche Wahlen von α, β, γ wird f zu einer orthogonalen Abbildung?