



Skript zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2015/16

Kombinations-Bachelorstudiengang Mathematik mit
Lehramtsbezug/-option

Dozent: Prof. Dr. Andreas Filler

Dieses Skript wurde von Prof. Dr. Helga Baum erarbeitet und im WS 2014/15 eingesetzt.
Es wurde für das WS 2015/16 nur geringfügig modifiziert. Der Aufbau der Vorlesung kann
an einigen Stellen von diesem Skript abweichen.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Aussagen, logische Schlüsse und Beweisstrategien	1
1.2	Mengen und Abbildungen	7
1.2.1	Mengen	7
1.2.2	Abbildungen	11
1.3	Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion	16
2	Reelle und komplexe Zahlen	21
2.1	Die reellen Zahlen	21
2.1.1	Die Körpereigenschaften von \mathbb{R}	21
2.1.2	Die Anordnungseigenschaften von \mathbb{R}	23
2.1.3	Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen	25
2.1.4	Die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen	30
2.1.5	Wurzeln und Potenzen reeller Zahlen	33
2.2	Die komplexen Zahlen	38
2.2.1	Geometrische Motivation für die Definition der komplexen Zahlen ...	38
2.2.2	Definition und Eigenschaften der komplexen Zahlen	40
3	Folgen und Reihen	47
3.1	Folgen in \mathbb{R} und in \mathbb{C}	48
3.1.1	Konvergente Zahlenfolgen und ihre Eigenschaften	48
3.1.2	Spezielle Eigenschaften reeller Folgen	54
3.1.3	Cauchy-Folgen und Konvergenz	60
3.2	Reihen in \mathbb{R} und \mathbb{C}	61
3.2.1	Konvergente und divergente Reihen, Konvergenzkriterien	62
3.2.2	Komplexe Potenzreihen	72
3.2.3	Anwendung: Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion und komplexe Potenzen	74
4	Stetige Funktionen	79
4.1	Definition stetiger Funktionen und Beispiele	80

4.2	Grenzwerte von Funktionen und stetige Fortsetzungen	87
4.3	Nullstellen, Fixpunkte und Extremwerte stetiger Funktionen	92
4.4	Anwendung: Der Fundamentalsatz der Algebra	95
4.5	Die trigonometrischen und die Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen	97
4.5.1	Die trigonometrischen Funktionen	97
4.5.2	Die Hyperbelfunktionen	103
5	Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen	107
5.1	Differenzierbare reelle Funktionen: Rechenregeln und Beispiele	107
5.2	Die Mittelwertsätze der Differentialrechnung und Anwendungen	115
5.3	Differenzierbarkeit von Potenzreihen	122
5.4	Taylorpolynome und Extremwertprobleme	128
5.5	Taylorreihen und reell-analytische Funktionen	133

Grundlagen

1.1 Aussagen, logische Schlüsse und Beweisstrategien

Aussagen sind sprachliche oder schriftliche Gebilde, die im täglichen Leben zur Beschreibung und Mitteilung von Sachverhalten und Meinungen dienen. Die Mathematik befasst sich mit Aussagen, von denen man wissen will, ob sie *wahr* oder *falsch* sind. Insbesondere möchte man wahre Aussagen über vermutete Zusammenhänge machen. Wir präzisieren deshalb zunächst, was wir in der Mathematik unter *Aussagen* verstehen.

Eine mathematische Aussage ist eine Aussage, die in einem gegebenen Kontext immer entweder wahr oder falsch ist.

Je nachdem, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, ordnen wir ihr einen *Wahrheitswert* $W(=wahr)$ oder $F(=falsch)$ zu.

Beispiele:

- "*Jedes Dreieck hat drei Ecken*" ist eine mathematische Aussage. Sie ist wahr.
- Die Aussage "*Die Innenwinkelsumme jedes Dreiecks beträgt 180°* " ist eine mathematische Aussage. Ob sie wahr oder falsch ist, hängt allerdings vom betrachteten Kontext ab. In der Euklidischen Geometrie ist sie wahr. Sie werden in der Vorlesung über Elementargeometrie die Lobatschewski-Geometrie kennenlernen, in der diese Aussage falsch ist (Hier ist die Aussage "*Die Innenwinkelsumme jedes Dreiecks ist kleiner als 180°* " wahr).
- Die Aussage "*Die Gleichung $x^2 + 2x + 2 = 0$ hat eine Lösung*" ist eine mathematische Aussage. Sucht man Lösungen x im Bereich der reellen Zahlen, so ist diese Aussage falsch. Im Bereich der komplexen Zahlen, die wir im Kapitel 2 dieser Vorlesung kennenlernen werden, ist diese Aussage wahr.
- Der Aussage "*In Berlin lebt man gern*" kann man weder den Wahrheitswert "wahr" noch den Wahrheitswert "falsch" zuordnen. Ob man diese Aussage bejaht oder nicht, hängt von der Auffassung des Betrachters ab. Sie hat deshalb nicht den Charakter einer mathematischen Aussage.

- Die Aussage "*Diese Aussage ist falsch*" ist keine mathematische Aussage. Wäre sie wahr, so wäre sie gleichzeitig falsch. Wäre sie falsch, so wäre sie gleichzeitig wahr.

Statt: *Die Aussage A wahr*, so sagt man auch: *A gilt* oder *A ist richtig*.

Im Folgenden werden wir unter *Aussagen* stets *mathematische Aussagen* verstehen. Die Formulierung von Aussagen kann sehr kompliziert sein, sie können durch Verknüpfung von mehreren Aussagen durch Worte wie "und", "oder", "nicht", "weder - noch", "sowohl als auch", "wenn - so", ... entstehen. Man kann sich fragen, wie der Wahrheitswert einer Aussage von diesen Teilaussagen abhängt. In der Umgangssprache wird das nicht immer einheitlich gehandhabt und führt dadurch mitunter zu Mißverständnissen. In der Mathematik fixiert man den Wahrheitswert der aus Teilaussagen verknüpften Aussage ein für alle mal. Wir stellen dies in den folgenden Tabellen zusammen, die man auch "Wahrheitstafeln" nennt.

1. Negation(Verneinung) einer Aussage A ("nicht A ", symbolisch: $\neg A$)

Beispiel: Die Aussage A lautet: *Alle Franzosen trinken gern Wein*.

Die Negation $\neg A$ lautet dann: *Nicht alle Franzosen trinken gern Wein* (oder auch: *Es gibt einen Franzosen, der nicht gern Wein trinkt*).

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
W	F
F	W

d.h., wenn A wahr ist, ist $\neg A$ falsch;
wenn A falsch ist, ist $\neg A$ wahr.

2. Konjunktion zweier Aussagen A, B : ("A und B", symbolisch: $A \wedge B$).

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

d.h., $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl
 A als auch B wahr sind.

3. Disjunktion zweier Aussagen A, B : ("A oder B", symbolisch: $A \vee B$).

Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

d.h., $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn min-
destens eine der Aussagen A oder B wahr ist.

Im Gegensatz zu mancher Verwendung des Wortes *oder* in der Umgangssprache als *ausschließendes oder* bedeutet das Wort *oder* in der Mathematik immer ein *nichtausschließendes oder*. A oder B ist wahr bedeutet also immer, dass eine der beiden Aussagen wahr ist, möglicherweise aber auch beide. Für ein *ausschließendes oder* benutzt man in der Mathematik immer die Worte *entweder ... oder*.

4. Implikation : ("Aus A folgt B ", symbolisch: $A \Rightarrow B$).

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

d.h., wenn die Aussage A falsch ist, ist die Aussage $A \Rightarrow B$ immer wahr, unabhängig davon, ob B wahr oder falsch ist. Z.B. ist die Implikation *Aus n teilt 2 folgt n teilt 6* für alle natürlichen Zahlen n wahr.

Die Aussage $A \Rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn die Wahrheit von A stets die Wahrheit von B nach sich zieht. Für eine wahre Implikation $A \Rightarrow B$ sagt man deshalb auch:

wenn A gilt, so gilt auch B ;

B gilt, falls A gilt;

*(die Gültigkeit von) A ist **hinreichend** für (die Gültigkeit von) B ;*

*(die Gültigkeit von) B ist **notwendig** für (die Gültigkeit von) A .*

Beispiel: Es sei Q ein Viereck in der Euklidischen Ebene. Dann ist die Implikation:

$$Q \text{ ist ein Rechteck} \Rightarrow Q \text{ ist ein Trapez}$$

wahr. Die Eigenschaft, "Rechteck" ist hinreichend für die Eigenschaft "Trapez", die Eigenschaft "Trapez" ist notwendig für die Eigenschaft "Rechteck".

5. Äquivalenz zweier Aussagen

Definition 1.1. Zwei Aussagen A und B nennt man *äquivalent* (symbolisch: $A \Leftrightarrow B$), wenn sie die gleichen Wahrheitswerte haben, d.h., entweder beide Aussagen sind wahr oder beide Aussagen sind falsch.

Beispiel: Es sei Δ ein Dreieck in der Euklidischen Ebene. Die Aussagen

A: Das Dreieck Δ ist gleichseitig.

B: Das Dreieck Δ ist gleichwinklig.

sind äquivalent.

Sind A und B zwei Aussagen, so ist $A \Leftrightarrow B$ ebenfalls eine Aussage. Ihre aus der Definition der Äquivalenz folgenden Wahrheitswerte in Abhängigkeit von denen von A und B zeigt die folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W
F	F	W
W	F	F
F	W	F

Weitere in der Mathematik benutzte Symbole sind die Abkürzungen für die **Quantoren**:

- \exists es gibt ein¹
- $\exists!$ es gibt genau ein
- \nexists es gibt kein
- \forall für alle, für jedes

Die Wahrheitstabellen für die logischen Verknüpfungen $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ von Aussagen bilden die Grundannahmen (**Axiome**) für das logische Schließen in der Mathematik. Mit Hilfe der Wahrheitstabellen können wir weitere **logische Gesetze (Tautologien) beweisen**. Dabei versteht man unter einem logischen Gesetz eine Aussage, die bei *jeder* Belegung der Ausgangsaussagen mit Wahrheitswerten den Wahrheitswert W annimmt.

Satz 1.1 *A, B und C bezeichnen Aussagen. Die folgenden Aussagen sind logische Gesetze:*

1. *Doppelte Negation:* $(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$.
2. *Transitivität:* $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.
3. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$.
4. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$,
 $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$.
5. *Regeln von de Morgan:*
 $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$,
 $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$.
6. *Kontrapositionsgesetz:*
 $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$.
7. *Assoziativgesetze:*
 $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$,
 $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$.
8. *Distributivgesetze:*
 $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$,
 $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.
9. *Kommutativgesetze:*
 $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$,
 $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$.

¹ Die unbestimmten Artikel *ein, eine* werden in der Mathematik stets im Sinne von *mindestens ein* gebraucht.

Beweis. Um zu zeigen, dass die Aussagen 1. - 9. logische Gesetze sind, muß man nachweisen, dass die jeweilige Aussage für jede Belegung der Ausgangsaussagen mit Wahrheitswerten wahr ist. Dies verläuft ganz formal durch Benutzung der Wahrheitstabellen für die Verknüpfungsoperationen \neg , \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow . Wir führen dies hier exemplarisch für 1., 3. und 6. aus und überlassen die anderen Fälle als Übungsaufgaben.

Zu 1.:

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$(\neg(\neg A)) \Leftrightarrow A$
W	F	W	W
F	W	F	W

Zu 3.:

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$
W	W	F	W	W	W
W	F	F	F	F	W
F	W	W	W	W	W
F	F	W	W	W	W

Zu 6.:

A	B	$A \Rightarrow B$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

□

Die Wahrheitstabellen und die logischen Gesetze bilden die Grundlage für den *Beweis der Wahrheit von Aussagen*. Wir merken uns dazu insbesondere die folgenden Spezialfälle:

Satz 1.2 A , B und C bezeichnen Aussagen. Dann gilt:

1. Sind A und $A \Rightarrow B$ wahr, so ist B wahr.
2. Sind A und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ wahr, so ist B wahr.
3. Ist $(\neg B) \Rightarrow C$ wahr und C falsch, so ist B wahr.

Beweis. Zu 1: Nach der Wahrheitstafel für die Aussage $A \Rightarrow B$ kann B für ein wahres A und ein wahres $A \Rightarrow B$ nur wahr sein.

Zu 2: Nach dem Kontrapositionsgesetz ist die Aussage $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ genau dann wahr, wenn die Aussage $A \Rightarrow B$ wahr ist. Deshalb erhält man 2. aus 1..

Zu 3.: Dies erhält man aus 2., indem man für A die Aussage $\neg C$ einsetzt und das Gesetz der doppelten Negation benutzt. □

Dies liefert verschiedene Strategien, die Wahrheit (Richtigkeit, Gültigkeit) einer Aussage B zu beweisen:

Direkter Beweis:

Beim *direkten Beweis* geht man von einer wahren Aussage A aus und folgert durch bereits als wahr erkannte Implikationen (d.h. durch "korrekte/zulässige Schlüsse") $(A \Rightarrow C_1)$, $(C_1 \Rightarrow C_2), \dots, (C_{k-1} \Rightarrow C_k), (C_k \Rightarrow B)$, dass die Aussage B wahr ist. Es ist allerdings oft schwierig, eine *geeignete* wahre Aussage A für den Start des Beweises zu finden.

Indirekter Beweis/Widerspruchsbeweis:

Beim *indirekten Beweis/Widerspruchsbeweis* nimmt man an, dass die Aussage B falsch ist, d.h. dass die Negation $\neg B$ gilt. Daraus folgert man durch korrekte Schlüsse $(\neg B \Rightarrow D_1)$, $(D_1 \Rightarrow D_2), \dots, (D_{k-1} \Rightarrow D_k), (D_k \Rightarrow E)$ eine Aussage E , von der man bereits weiß, dass sie falsch ist. Man erhält also einen Widerspruch, denn E müßte nach unserer Annahme, dass $\neg B$ wahr ist, ebenfalls wahr sein. Die Annahme war also falsch, d.h. B ist wahr. Die Aussage $\neg E$ könnte man als Start für einen direkten Beweis der Wahrheit von B benutzen.

Beispiel: Aussage B : Für alle reellen Zahlen $a, b \geq 0$ gilt $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$.

Direkter Beweis: Es seien a und b reelle Zahlen mit $a, b \geq 0$.

Es gilt $(a - b)^2 \geq 0$ (wahre Aussage A). Daraus folgen durch korrekte Schlüsse, die man vom Rechnen mit reellen Zahlen kennt:

$$\begin{aligned} & (a - b)^2 \geq 0 && (A) \\ \Rightarrow & a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 && (C_1) \\ \Rightarrow & a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab && (C_2) \\ \Rightarrow & (a + b)^2 \geq 4ab && (C_3) \\ \Rightarrow & (a + b) \geq 2\sqrt{ab} && (C_4) \text{ (korrekter Schluß, da } a, b \geq 0) \\ \Rightarrow & \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} && (B). \end{aligned}$$

Also gilt B . □

Indirekter Beweis: Wir nehmen an, dass die Aussage B falsch ist, d.h., dass es zwei reelle Zahlen $a, b \geq 0$ gibt mit $\frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b}$. (d.h. $\neg B$ ist wahr). Daraus folgen durch korrekte Schlüsse für diese Zahlen a, b :

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{2} < \sqrt{a \cdot b} && (\neg B) \\ \Rightarrow & \frac{(a+b)^2}{4} < a \cdot b && (D_1) \text{ (korrekter Schluß, da } a, b \geq 0) \\ \Rightarrow & (a + b)^2 < 4ab && (D_2) \\ \Rightarrow & a^2 + 2ab + b^2 < 4ab && (D_3) \\ \Rightarrow & a^2 - 2ab + b^2 < 0 && (D_4) \\ \Rightarrow & (a - b)^2 < 0 && (E). \end{aligned}$$

Die Aussage E ist falsch (Widerspruch), also gilt B . □

Der Ringschluß:

Ein weiteres oft benutztes Prinzip ist der **Ringschluß** beim Beweis von Äquivalenzen. Will man zeigen, dass die Aussagen $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{k-1}, A_k$ zueinander äquivalent sind, so genügt es nach Satz 1.1, Punkt 2. und 4., zu zeigen, dass die folgenden Implikationen gelten:

$$(A_1 \Rightarrow A_2), (A_2 \Rightarrow A_3), \dots, (A_{k-1} \Rightarrow A_k), (A_k \Rightarrow A_1).$$

Angabe von Gegenbeispielen zum Widerlegen der Wahrheit einer Aussage:

Will man untersuchen, ob eine Aussage B wahr oder falsch ist, so kann man sich zunächst *Spezialfälle (Beispiele)* dieser Aussage ansehen und diese untersuchen. Findet man dabei *ein Beispiel*, für das die Aussage B nicht gilt, so ist B falsch. Z.B:

Aussage B : *Alle Hörer der Vorlesung Analysis 1 sind männlich.*

Diese Aussage ist falsch, denn z.B. Frau ... nimmt an der Vorlesung Analysis 1 teil.

1.2 Mengen und Abbildungen**1.2.1 Mengen**

In dieser Vorlesung benutzen wir den "naiven" Mengenbegriff, den Georg Cantor (1845-1918) geprägt hat².

Definition 1.2. *Unter einer Menge verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder des Denkens, welche Elemente der Menge heißen, zu einem Ganzen.*

Ist M eine Menge und x ein Element von M , so schreibt man $x \in M$. Ist x kein Element von M , so schreibt man $x \notin M$. Wir lassen auch Mengen zu, die kein Element enthalten. Eine solche Menge heißt *leere Menge* und wird mit \emptyset bezeichnet. Mengen kann man durch Aufzählen ihrer Elemente beschreiben, die man innerhalb von geschweiften Klammern auflistet (ggf. mit \dots , wenn der Sinn im Kontext klar ist), z.B.:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, \dots, 10\} && \text{Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 10,} \\ \mathbb{Z} &= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} && \text{Menge der ganzen Zahlen.} \end{aligned}$$

Besteht eine Menge M aus allen Elementen x , die eine gewisse Eigenschaft $E(x)$ erfüllen, so schreiben wir dies in der Form

$$M = \{x \mid x \text{ erfüllt } E(x)\}.$$

² Mit dem axiomatischen Aufbau der Mengenlehre sind erhebliche Probleme verbunden, die wir in dieser Vorlesung nicht thematisieren wollen.

Definition 1.3. Seien A und B Mengen.

1. A heißt Teilmenge von B (symbolisch: $A \subset B$), wenn jedes Element von A auch Element von B ist (symbolisch: $x \in A \Rightarrow x \in B$).
2. Die Mengen A und B heißen gleich (symbolisch $A = B$), wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.
3. A heißt echte Teilmenge von B , wenn $A \subset B$ und $A \neq B$.
4. Die Menge aller Teilmengen von A heißt Potenzmenge von A und wird mit $\mathcal{P}(A)$ bezeichnet:

$$\mathcal{P}(A) := \{M \mid M \subset A\}.$$

Das Zeichen $:=$ wird in der Mathematik für die Definition von Begriffen benutzt. Links (auf der Seite von $:$) steht der zu definierende Begriff und rechts die ihn definierende Eigenschaft. Statt $A \subset B$ schreibt man auch $B \supset A$.

Aus der Definition folgt für Mengen M, N, P unmittelbar:

$$\begin{aligned} \emptyset &\subset M \quad \text{und} \quad M \subset M, \\ M \subset N \quad \text{und} \quad N \subset P &\Rightarrow M \subset P. \end{aligned}$$

Mengen, die nur aus einem Element x bestehen, bezeichnet man mit $\{x\}$. Für die Potenzmenge von A gilt:

$$\begin{aligned} A &\in \mathcal{P}(A) \quad \text{und} \quad \emptyset \in \mathcal{P}(A), \\ x \in A &\Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A), \\ M \subset A &\Leftrightarrow M \in \mathcal{P}(A). \end{aligned}$$

Die Potenzmenge von $A = \{1, 2, 3\}$ ist z.B.

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Definition 1.4. Seien X und Y Mengen. Dann heißt

$$\begin{aligned} X \cup Y &:= \{x \mid x \in X \text{ oder } x \in Y\} && \text{Vereinigung von } X \text{ und } Y, \\ X \cap Y &:= \{x \mid x \in X \text{ und } x \in Y\} && \text{Durchschnitt von } X \text{ und } Y. \end{aligned}$$

Zwei Mengen X und Y heißen *disjunkt*, wenn $X \cap Y = \emptyset$. Die Vereinigung zweier disjunkter Mengen X und Y nennt man auch *disjunkte Vereinigung*. Wir notieren dies mit dem Symbol: $X \dot{\cup} Y$.

Satz 1.3 (Rechenregeln für Vereinigung und Durchschnitt)

X, Y und Z seien Mengen³. Dann gilt:

1. $X \cap Y \subset Y \subset X \cup Y$.
2. *Kommutativgesetz:*
 $X \cup Y = Y \cup X$ und $X \cap Y = Y \cap X$.
3. *Assoziativgesetz:*
 $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ und $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$.

³ Eine solche Formulierung bedeutet *immer*, dass X, Y und Z beliebige Mengen sind.

4. *Distributivgesetze:*

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad \text{und} \quad X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

$$5. X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \cap Y = X.$$

Beweis. Die Behauptung 1 folgt direkt aus der Definition. Die Behauptungen 2. und 3. folgen direkt aus Satz 1.1 (Kommutativität und Assoziativität von *und* und *oder*).

Zu 4: Wir zeigen das erste Distributivgesetz durch Äquivalenzschlüsse:

$$\begin{aligned} x \in X \cap (Y \cup Z) &\Leftrightarrow x \in X \text{ und } x \in Y \cup Z && \text{(Def } \cap) \\ &\Leftrightarrow x \in X \text{ und } (x \in Y \text{ oder } x \in Z) && \text{(Def } \cup) \\ &\Leftrightarrow (x \in X \text{ und } x \in Y) \text{ oder } (x \in X \text{ und } x \in Z) && \text{(Distr. } \wedge, \vee) \\ &\Leftrightarrow x \in X \cap Y \text{ oder } x \in X \cap Z && \text{(Def } \cap) \\ &\Leftrightarrow x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z) && \text{(Def } \cup). \end{aligned}$$

Wenn die Äquivalenzschlüsse zu unübersichtlich sind, kann den Beweis der Gleichheit von zwei Mengen M_1 und M_2 auch immer in 2 getrennten Schritten führen:

1. *Schritt:* Zeige: $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$.

2. *Schritt:* Zeige: $x \in M_2 \Rightarrow x \in M_1$.

Wir zeigen das 2. Distributivgesetz zur Demonstration in dieser Form:

$$\begin{aligned} x \in X \cup (Y \cap Z) &\Rightarrow x \in X \text{ oder } x \in Y \cap Z \\ &\Rightarrow x \in X \text{ oder } (x \in Y \text{ und } x \in Z) \\ &\Rightarrow (x \in X \text{ oder } x \in Y) \text{ und } (x \in X \text{ oder } x \in Z) \\ &\Rightarrow x \in X \cup Y \text{ und } x \in X \cup Z \\ &\Rightarrow x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z) &\Rightarrow x \in X \cup Y \text{ und } x \in X \cup Z \\ &\Rightarrow (x \in X \text{ oder } x \in Y) \text{ und } (x \in X \text{ oder } x \in Z) \\ &\Rightarrow x \in X \text{ oder } (x \in Y \text{ und } x \in Z) \\ &\Rightarrow x \in X \cup (Y \cap Z). \end{aligned}$$

Zu 5: Wir zeigen diese Äquivalenzen durch einen Ringschluß:

$$X \subset Y \Rightarrow X \cup Y = Y \Rightarrow X \cap Y = X \Rightarrow X \subset Y.$$

Es gelte $X \subset Y$. Dann ist $X \cup Y \subset Y \subset X \cup Y$ und somit $X \cup Y = Y$. Nach dem Distributivgesetz folgt dann für den Durchschnitt mit X :

$$X \cap Y = X \cap (X \cup Y) = (X \cap X) \cup (X \cap Y) = X \cup (X \cap Y) = X.$$

Daraus folgt dann $X \subset X \cap Y \subset Y$. □

Definition 1.5. Seien X und A Mengen. Dann heißt die Differenz

$$X \setminus A := \{x \mid x \in X \text{ und } x \notin A\}$$

das Komplement von A in X (oder die Differenz von X und A).

Satz 1.4 (Rechenregeln für die Mengendifferenz)

Seien A , B und X Mengen. Dann gilt:

1. $X \setminus (X \setminus A) = X \cap A$.

Für $A \subset X$ gilt insbesondere $X \setminus (X \setminus A) = A$.

2. de Morgansche Regeln:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B),$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

3. Distributivgesetze:

$$(A \cap B) \setminus X = (A \setminus X) \cap (B \setminus X),$$

$$(A \cup B) \setminus X = (A \setminus X) \cup (B \setminus X).$$

Beweis. Zu 1:

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (X \setminus A) &\Leftrightarrow x \in X \text{ und } x \notin X \setminus A \\ &\Leftrightarrow x \in X \text{ und } x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap X. \end{aligned}$$

Zu 2: Wir zeigen nur die erste Gleichheit, die zweite Gleichung beweist man analog.

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (A \cup B) &\Leftrightarrow x \in X \text{ und } x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in X \text{ und } (x \notin A \text{ und } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in X \text{ und } x \notin A) \text{ und } (x \in X \text{ und } x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in X \setminus A \text{ und } x \in X \setminus B \\ &\Leftrightarrow x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B). \end{aligned}$$

Zu 3: Übungsaufgabe. □

Definition 1.6. Es seien eine Menge A sowie für jedes $\alpha \in A$ eine Menge X_α gegeben. Dann heißen die Mengen

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha := \{x \mid \exists \alpha \in A \text{ mit } x \in X_\alpha\}$$

und

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha := \{x \mid \forall \alpha \in A \text{ gilt } x \in X_\alpha\}$$

Vereinigung bzw. Durchschnitt der Mengenfamilie $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Die Vereinigung und der Durchschnitt von Mengenfamilien erfüllen die analogen Rechenregeln wie in den Sätzen 1.3 und 1.4 für zwei Mengen formuliert sind.

Definition 1.7. Seien X und Y Mengen. Das Produkt von X und Y ist die Menge der Tupel (geordneten Paare)

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}.$$

Das Produkt von n Mengen X_1, X_2, \dots, X_n ist die Menge der n -Tupel

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Satz 1.5 (Rechenregeln für das Mengenprodukt)

Seien A , B und M Mengen. Dann gilt:

1. $(A \cup B) \times M = (A \times M) \cup (B \times M)$.
2. $(A \cap B) \times M = (A \times M) \cap (B \times M)$.
3. $(A \setminus B) \times M = (A \times M) \setminus (B \times M)$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Abschließend listen wir die Bezeichnungen auf, die wir in dieser Vorlesung für die Zahlbereiche benutzen:

\mathbb{N}	Menge aller natürlichen Zahlen: 1, 2, 3, ...
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}	Menge aller ganzen Zahlen
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{Q}^+	Menge der positiven rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	Menge der irrationalen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen

1.2.2 Abbildungen

Definition 1.8. *Es seien X und Y nichtleere Mengen.*

1. *Eine Vorschrift f , die jedem Element von X genau ein Element von Y zuordnet, heißt Abbildung (oder Funktion⁴) von X in Y . Symbolisch:*

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

$f(x) \in Y$ heißt *Bildpunkt* von x unter f . Ist $y \in Y$, so heißt jedes $x \in X$ mit $f(x) = y$ ein *Urbild* von y bei f .

2. X heißt *Definitionsbereich* von f und Y *Wertebereich* von f . Die Menge

$$\text{im}(f) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$$

heißt *Bild* von f .

3. Die Menge

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

heißt der *Graph* von f .

⁴ Wir unterscheiden in dieser Vorlesung nicht zwischen Abbildungen und Funktionen. Die Bezeichnung *Funktion* ziehen wir vor, wenn X und Y Zahlbereiche sind. Dies wird in der mathematischen Literatur nicht einheitlich gehandhabt!

4. Zwei Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen gleich (symbolisch $f = g$), wenn $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Beispiele:

1. Die Identität auf X :

$$\begin{aligned} \text{Id}_X : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

2. Sei $y_0 \in Y$ fixiert. Dann heißt

$$\begin{aligned} c_{y_0} : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto y_0 \end{aligned}$$

konstante Abbildung. Für ihren Graphen gilt $\Gamma_{c_{y_0}} = \{(x, y_0) \mid x \in X\} = X \times \{y_0\}$.

3. Ist $X \subset \mathbb{R}$, so heißt jede Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ *reelle Funktion*. Ein Beispiel ist die aus der Schule bekannte Logarithmusfunktion:

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x. \end{aligned}$$

4. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $A \subset X$ eine nichtleere Teilmenge.

Dann heißt die Abbildung $f|_A : A \rightarrow Y$, die jedem $a \in A$ den Wert $f(a)$ zuordnet, die *Einschränkung von f auf A* .

Ist $g : A \rightarrow Y$ eine Abbildung mit $g(a) = f(a)$ für alle $a \in A$, d.h. $g = f|_A$, so heißt f eine *Fortsetzung von g auf X* .

5. Ist $A \subset X$ eine nichtleere Teilmenge von X , so heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota_A : A &\rightarrow X \\ a &\mapsto a. \end{aligned}$$

Inklusion von A in X .

6. Sei $X_1 \times X_2$ das Produkt zweier nichtleerer Mengen und $i \in \{1, 2\}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{pr}_i : X_1 \times X_2 &\rightarrow X_i \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_i \end{aligned}$$

heißt *Projektion auf die i . Komponente von $X_1 \times X_2$* .

Man kann Abbildungen miteinander verknüpfen:

Definition 1.9. Seien X, Y, Z nichtleere Mengen und $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung:

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\rightarrow Z \\ x &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

die *Verknüpfung (oder Hintereinanderausführung) von f und g* .

Satz 1.6 Seien $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ und $h : Z \rightarrow W$ Abbildungen. Dann sind die Verknüpfungen $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ wohldefiniert und es gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis. Die Betrachtung der Definitions- und Wertebereiche der jeweiligen Abbildungen zeigt die Wohldefiniiertheit. Sei $x \in X$. Dann gilt nach Definition:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

Somit sind beide Abbildungen gleich. □

Auf Grund dieses Satzes können wir beim Verknüpfen mehrerer Abbildungen die Klammern weglassen: $h \circ g \circ f := h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

In der Analysis befassen wir uns mit Eigenschaften von Abbildungen. Zunächst betrachten wir die folgenden drei Eigenschaften:

Definition 1.10. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt

1. *surjektiv*, falls jeder Punkt von Y (mindestens) ein Urbild bei f besitzt, d.h. falls gilt:

$$\forall y \in Y \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y.$$

2. *injektiv*, falls jeder Punkt von Y höchstens ein Urbild besitzt, d.h. falls gilt:

$$x_1, x_2 \in X \wedge f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

3. *bijektiv*, falls f surjektiv und injektiv ist, d.h. falls jeder Punkt von Y genau ein Urbild besitzt.

Ist $f : X \rightarrow Y$ bijektiv, so ist die *inverse Abbildung* (oder *Umkehrabbildung*) $f^{-1} : Y \rightarrow X$ zu f definiert durch:

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\rightarrow X \\ y &\mapsto f^{-1}(y) := \text{das eindeutig bestimmte Urbild von } y \text{ bei } f. \end{aligned}$$

f^{-1} ist dann ebenfalls bijektiv und es gilt auf Grund der Definition:

$$f^{-1} \circ f = Id_X, \quad f \circ f^{-1} = Id_Y \quad \text{und} \quad (f^{-1})^{-1} = f.$$

Beispiele:

1. Die Identität $Id_X : X \rightarrow X$ ist bijektiv. Für ihre Umkehrfunktion gilt $(Id_X)^{-1} = Id_X$.
2. Die konstante Abbildung $c_{y_0} : X \rightarrow Y$ ist weder surjektiv noch injektiv, falls X und Y mehr als ein Element enthalten.

3. Die reelle Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist die Exponentialfunktion (Schulwissen).
4. Ist $A \subset X$ eine echte Teilmenge, so ist die Inklusion $\iota_A : A \rightarrow X$ injektiv, aber nicht surjektiv.
5. Die Projektion $\text{pr}_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ ist surjektiv, aber - falls X_2 mehr als ein Element enthält - nicht injektiv.

Satz 1.7 Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann gilt:

1. f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt, so dass $g \circ f = \text{Id}_X$. (Eine solche Abbildung g heißt Linksinverse von f).
2. f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $h : Y \rightarrow X$ gibt, so dass $f \circ h = \text{Id}_Y$. (Eine solche Abbildung h heißt Rechtsinverse von f).
3. f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt, die sowohl Rechts- als auch Linksinverse von f ist, d.h. so dass $g \circ f = \text{Id}_X$ und $f \circ g = \text{Id}_Y$. In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt und es gilt $g = f^{-1}$.

Beweis. Zu 1:

(\implies): Sei f injektiv. Wir fixieren ein Element $x_0 \in X$ und definieren $g : Y \rightarrow X$ durch

$$g(y) := \begin{cases} x & \text{falls } y \in \text{im}(f) \text{ und } f(x) = y, \\ x_0 & \text{falls } y \notin \text{im}(f). \end{cases}$$

Dann ist g wohldefiniert und es gilt $g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$. g ist also eine Linksinverse zu f .

(\impliedby): Sei $g : Y \rightarrow X$ eine Linksinverse von f . Seien $x_1, x_2 \in X$ zwei Punkte mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. Folglich ist f injektiv.

Zu 2:

(\implies): Sei f surjektiv. Für jedes $y \in Y$ wählen wir ein Urbild $x(y)$ von y bei f aus⁵. Dann ist die Abbildung $h : Y \rightarrow X$ mit $h(y) := x(y)$ wohldefiniert und es gilt $f(h(y)) = f(x(y)) = y$ für alle $y \in Y$. h ist also eine Rechtsinverse von f .

(\impliedby): Sei $h : Y \rightarrow X$ eine Rechtsinverse von f . Dann gilt $f(h(y)) = y$ für alle $y \in Y$. Also ist $h(y) \in X$ ein Urbild von y . Folglich ist f surjektiv.

Zu 3:

(\implies): Sei f bijektiv. Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ eine Rechts- und Linksinverse von f (siehe oben).

(\impliedby): Sei $g : Y \rightarrow X$ eine Rechts- und Linksinverse von f . Dann ist f nach 1. injektiv und nach 2. surjektiv, also bijektiv. Die Abbildung g stimmt dann mit der Umkehrabbildung f^{-1} überein. Sie ist somit eindeutig bestimmt. □

⁵ Hierfür benötigt man das Auswahlaxiom der Mengenlehre. Dieses Axiom besagt, dass man für jede Familie nichtleerer Mengen aus jeder dieser Mengen jeweils ein Element auswählen kann. In der Analysis-Vorlesung werden wir dieses Auswahlaxiom immer voraussetzen.

Satz 1.8 *Es seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei bijektive Abbildungen. Dann ist auch die Verknüpfung $g \circ f : X \rightarrow Z$ bijektiv und für ihre inverse Abbildung gilt*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \quad (1.1)$$

Beweis. Für die inversen Abbildungen $f^{-1} : Y \rightarrow X$ und $g^{-1} : Z \rightarrow Y$ zu f bzw. g gilt

$$f^{-1} \circ f = Id_X, \quad f \circ f^{-1} = Id_Y, \quad g^{-1} \circ g = Id_Y, \quad g \circ g^{-1} = Id_Z.$$

Daraus folgt wegen der Assoziativität der Verknüpfung \circ

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ Id_Y \circ f = f^{-1} \circ f = Id_X, \\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ Id_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = Id_Z. \end{aligned}$$

Aus Satz 1.7 (3. Punkt) folgt dann, dass $g \circ f$ bijektiv ist und ihre Umkehrabbildung durch (1.1) gegeben ist. \square

Definition 1.11. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $A \subset X$ und $B \subset Y$. Dann heißt*

$$\begin{aligned} f(A) &:= \{f(a) \in Y \mid a \in A\} \subset Y && \text{Bild von } A \text{ unter } f, \\ f^{-1}(B) &:= \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X && \text{Urbild von } B \text{ unter } f. \end{aligned}$$

Ist $\{y\} \subset Y$ eine 1-elementige Menge, so schreiben wir auch kurz: $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$. Offensichtlich gilt $\text{im}(f) = f(X)$.

Satz 1.9 *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $A, A_1, A_2 \subset X$ und $B, B_1, B_2 \subset Y$. Dann gilt:*

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
3. $f(X \setminus A) \supset f(X) \setminus f(A)$.
4. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
5. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
6. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

Beweis. Übungsaufgabe. (Beachte, dass in 2. und 3. keine Gleichheit steht!!) \square

1.3 Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion

In der Mathematik trifft man viele Aussagen der Form:

Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt die Eigenschaft $E(n)$.

Um die Wahrheit solcher Aussagentypen zu beweisen, eignet sich in vielen Fällen das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Die natürlichen Zahlen werden durch auf Peano zurückgehende Axiome (die *Peano-Axiome*) eingeführt⁶. Aus diesen Axiomen folgt die Induktionseigenschaft für die natürlichen Zahlen, die folgendes besagt:

Sei $M \subset \mathbb{N}_0$ eine Teilmenge der (um Null ergänzten) natürlichen Zahlen, die die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:

- (1) $n_0 \in M$,
- (2) $\forall n \geq n_0$ gilt: $n \in M \Rightarrow (n + 1) \in M$.

Dann gilt für diese Menge: $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq n_0\} \subset M$.

Als Umformulierung dieser Induktionseigenschaft erhalten wir das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ eine fixierte natürliche Zahl oder 0.

Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben.

Wir setzen voraus, dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $A(n_0)$ ist richtig (Induktionsanfang).
- (2) $\forall n \geq n_0$ gilt: Ist $A(n)$ richtig, so ist auch $A(n + 1)$ richtig.
(Induktionsschritt).

Dann ist die Aussage $A(n)$ für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ richtig.

Um einzusehen, dass das Prinzip der vollständigen Induktion aus der Induktionseigenschaft der natürlichen Zahlen folgt, setzen wir

$$M := \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \text{Aussage } A(n) \text{ ist richtig}\}.$$

Dann gilt:

- $n_0 \in M$ (nach Induktionsanfang).
- $\forall n \geq n_0$ gilt: $n \in M \Rightarrow (n + 1) \in M$ (nach Induktionsschritt).

Aus der Induktionseigenschaft der natürlichen Zahlen folgt nun, dass $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ richtig ist.

⁶ Zum Aufbau der Zahlbereiche gibt es im Lehramtsstudium eine extra Vorlesung. Wir zitieren deshalb hier nur die benötigten Eigenschaften. Literatur: J. Kramer, A-M. Pippich: *Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen*, Kapitel 1, Springer-Spektrum 2013.

Eine typisches Anwendungsfeld für das Beweisprinzip der vollständigen Induktion sind Summenformeln. Wir demonstrieren dies an einem Beispiel:

Satz 1.10 Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=1}^n j := 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (\text{Aussage } A(n))$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Die Aussage $A(1)$ ist richtig, denn $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschritt: Wir setzen voraus, dass die Aussage $A(n)$ für eine (beliebige, aber feste) natürliche Zahl n richtig ist (Induktionsvoraussetzung) und behaupten, dass dann auch die Aussage $A(n+1)$ richtig ist (Induktionsbehauptung).

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} j &= \left(\sum_{j=1}^n j \right) + (n+1) \stackrel{A(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

□

Als weitere Anwendungen beweisen wir einige Eigenschaften der Fakultät einer natürlichen Zahl und der Binomialkoeffizienten.

Definition 1.12. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Zahl

$$n! := \prod_{j=1}^n j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

heißt n -Fakultät. Des Weiteren setzen wir $0! := 1$.

Satz 1.11 Die Anzahl a_n aller Anordnungen von n verschiedenen Objekten ist $n!$.

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $a_1 = 1$ und $1! = 1$, also ist $a_1 = 1!$.

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n = n!$.

Induktionsbehauptung: Es gilt $a_{n+1} = (n+1)!$.

Induktionsbeweis: Wir betrachten $(n+1)$ Objekte O_1, \dots, O_{n+1} . Die möglichen Anordnungen dieser Objekte kann man in $(n+1)$ Klassen K_j mit $j \in \{1, \dots, n+1\}$ unterteilen: K_j sei die Menge derjenigen Anordnungen, in denen O_j als erstes Element steht, das heißt

$$K_j := \{(O_j, O_{i_1}, \dots, O_{i_n}) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n+1\} \setminus \{j\}\}.$$

Z_j sei die Anzahl der Elemente in K_j . Folglich ist Z_j gleich der Anzahl der Anordnungen der n Objekte $O_1, \dots, O_{j-1}, O_{j+1}, \dots, O_{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist aber die Anzahl der Anordnungen von n Objekten gleich $a_n = n!$. Also gilt

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} Z_j = \sum_{j=1}^{n+1} a_n = \sum_{j=1}^{n+1} n! = (n+1) \cdot n! = (n+1)! .$$

□

Definition 1.13. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Die Zahl

$$\binom{x}{k} := \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \dots \cdot (x-(k-1))}{k!}$$

heißt Binomialkoeffizient. (Sprich: “ x über k ”). Für $k=0$ setzt man $\binom{x}{0} := 1$.

Satz 1.12 Es seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- a) $\binom{n}{k} = 0$, falls $k > n$.
 b) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$, falls $0 \leq k \leq n$.
 c) $\binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} = \binom{x+1}{k+1}$.

Beweis. Ist $k > n$, so tritt im Zähler von $\binom{n}{k}$ die Zahl 0 als Faktor auf. Folglich ist $\binom{n}{k} = 0$. Für $k=0$ und $k=n$ ist b) offensichtlich erfüllt. Für $0 < k < n$ gilt:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}. \end{aligned}$$

Für $k=0$ ist c) offensichtlich erfüllt. Für $k > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \binom{x}{k} + \binom{x}{k+1} &= \frac{x \cdot (x-1) \cdot \dots \cdot (x-(k-1))}{k!} + \frac{x \cdot (x-1) \cdot \dots \cdot (x-k)}{(k+1)!} \\ &= \frac{x \cdot (x-1) \cdot \dots \cdot (x-(k-1))}{k!} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{x-k}{k+1}\right)}_{= \frac{k+1+x-k}{k+1} = \frac{x+1}{k+1}} \\ &= \frac{x \cdot (x-1) \cdot \dots \cdot ((x+1)-k)}{k!} \cdot \frac{(x+1)}{k+1} \\ &= \frac{(x+1) \cdot ((x+1)-1) \cdot ((x+1)-2) \cdot \dots \cdot ((x+1)-k)}{(k+1)!} \\ &= \binom{x+1}{k+1}. \end{aligned}$$

□

Satz 1.13 Seien k und n natürliche Zahlen und sei $1 \leq k \leq n$. Es bezeichne c_k^n die Anzahl aller k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge. Dann gilt $c_k^n = \binom{n}{k}$. Insbesondere ist $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Beweis. Der Beweis von Satz 1.13 erfolgt durch vollständige Induktion über n .

Induktionsanfang: Es gilt $c_1^1 = 1 = \binom{1}{1}$, denn aus einer einelementigen Menge kann nur ein Element ausgewählt werden.

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $c_k^n = \binom{n}{k}$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

Induktionsbehauptung: $c_k^{n+1} = \binom{n+1}{k}$ für alle $k \in \{1, \dots, n+1\}$.

Induktionsbeweis: Bei der Auswahl einer einelementigen Teilmenge aus einer $(n+1)$ -elementigen Menge hat man $(n+1)$ verschiedene Möglichkeiten. Es gilt somit:

$$c_1^{n+1} = n+1 = \binom{n+1}{1}.$$

Betrachtet man die Anzahl aller $(n+1)$ -elementigen Teilmengen einer $(n+1)$ -elementigen Menge, so gilt offensichtlich

$$c_{n+1}^{n+1} = 1 = \binom{n+1}{n+1}.$$

Es genügt also, die Behauptung für $k \in \{2, \dots, n\}$ zu zeigen. Betrachten wir eine Menge $M = \{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ mit $(n+1)$ Elementen. Dann zerfallen die k -elementigen Teilmengen von M in zwei disjunkte Klassen:

K_0 : alle Teilmengen, die E_{n+1} nicht enthalten, und

K_1 : alle Teilmengen, die E_{n+1} enthalten.

Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen in Klasse K_0 ist gleich der Anzahl der k -elementigen Teilmengen von $\{E_1, \dots, E_n\}$, also entsprechend der Induktionsvoraussetzung gleich $c_k^n = \binom{n}{k}$. Die Anzahl der k -elementigen Teilmengen in Klasse K_1 ist gleich der Anzahl der $(k-1)$ -elementigen Teilmengen von $\{E_1, \dots, E_n\}$, also nach Induktionsvoraussetzung gleich $c_{k-1}^n = \binom{n}{k-1}$. Folglich gilt nach Satz 1.12

$$c_k^{n+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

□

Reelle und komplexe Zahlen

Im Rahmen des Lehramtstudiums wird der Aufbau der Zahlbereiche ausführlich in der Vorlesung *Algebra/Zahlentheorie und ihre Didaktik* behandelt. Wir gehen in der Vorlesung *Analysis I* davon aus, daß der Aufbau der Zahlbereiche bis zu den reellen Zahlen bekannt ist. In Abschnitt 2.1 werden wir die grundlegenden Eigenschaften der reellen Zahlen zusammenstellen. In Abschnitt 2.2 führen wir die komplexen Zahlen ein.

2.1 Die reellen Zahlen

Im Folgenden setzen wir voraus, dass die reellen Zahlen existieren und dass sie dem Leser bereits bekannt sind. Das Ziel dieses Abschnittes besteht darin, noch einmal die grundlegenden, die reellen Zahlen eindeutig charakterisierenden Eigenschaften (ihre sogenannten “Axiome”) zusammenzustellen und daraus wichtige Rechenregeln abzuleiten. Diese grundlegenden Eigenschaften sind

- die Körperaxiome,
- die Anordnungsaxiome und
- das Vollständigkeitsaxiom.

Wir werden in dieser Vorlesung nicht darauf eingehen, ob überhaupt eine Menge existiert, die die obigen drei Axiome erfüllt, und wie und woraus man sie ggf. konstruieren kann. Wir werden auch nicht untersuchen, ob eine Menge, die die obigen Axiome erfüllt, eindeutig bestimmt ist. Für diese Fragen verweisen wir auf das Buch von Jürg Kramer und Anna-Maria von Pippich: *Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen*, Springer-Spektrum 2013 sowie auf die Lehramts-Vorlesung *Algebra und Zahlentheorie*.

2.1.1 Die Körpereigenschaften von \mathbb{R}

Man kann reelle Zahlen addieren und multiplizieren:

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longmapsto x + y \in \mathbb{R} && \text{Addition,} \\(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longmapsto x \cdot y \in \mathbb{R} && \text{Multiplikation.}\end{aligned}$$

Addition und Multiplikation haben folgende Eigenschaften K1 - K9 (Rechenregeln):

Addition:

$$\text{K1: } x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (\text{Kommutativgesetz der Addition})$$

$$\text{K2: } (x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (\text{Assoziativgesetz der Addition})$$

$$\text{K3: } 0 + x = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Existenz eines neutralen Elementes})$$

$$\text{K4: Zu jedem } x \in \mathbb{R} \text{ gibt es ein } y \in \mathbb{R} \text{ mit } x + y = 0. \text{ } y \text{ heißt das Negative von } x \text{ und wird mit } y =: -x \text{ bezeichnet.} \quad (\text{Existenz des negativen Elements})$$

Multiplikation:

$$\text{K5: } x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (\text{Kommutativgesetz der Multiplikation})$$

$$\text{K6: } (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (\text{Assoziativgesetz der Multiplikation})$$

$$\text{K7: } 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Existenz eines neutralen Elementes})$$

$$\text{K8: Zu jedem } x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \text{ existiert ein } z \in \mathbb{R} \text{ mit } x \cdot z = 1. \text{ } z \text{ heißt das inverse Element zu } x \text{ und wird mit } z =: \frac{1}{x} \text{ bezeichnet.} \quad (\text{Existenz des inversen Elementes})$$

$$\text{K9: } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (\text{Distributivgesetz}).$$

Aus diesen neun grundlegenden Eigenschaften lassen sich die weiteren Rechenregeln für die reellen Zahlen ableiten. Beweisen Sie zur Übung, dass z.B. die folgenden Eigenschaften **allein aus K1 - K9** folgen:

- Die neutralen Elemente der Addition und der Multiplikation sind eindeutig bestimmt.
- Das Negative und das Inverse von $x \in \mathbb{R}$ sind eindeutig bestimmt.
- $0 \cdot x = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
- Die Gleichung $a + x = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, hat genau eine Lösung, nämlich $x = b + (-a) =: b - a$. ($b - a$ heißt *Differenz von b und a*).
- Die Gleichung $a \cdot x = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, hat genau eine Lösung, nämlich $x = b \cdot \frac{1}{a} =: \frac{b}{a}$. ($\frac{b}{a}$ heißt der *Quotient von b und a*).
- Für reelle Zahlen a, b, c, d mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$ gilt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}.$$

Definition 2.1. Eine Menge \mathbb{K} mit mindestens zwei Elementen, auf der zwei Operationen $+$ und \cdot

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} & \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto x + y & (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften K1 bis K9 gegeben sind, heißt *Körper*¹.

¹ Wobei in K1 - K9 natürlich \mathbb{R} durch \mathbb{K} zu ersetzen ist, und in K3 und K7 die Existenz eines solchen neutralen Elementes 0 für die Addition bzw. 1 für die Multiplikation gefordert wird.

Wir schreiben den Körper \mathbb{K} mit seinen beiden Operationen $+$ und \cdot oft in der Form $[\mathbb{K}, +, \cdot]$. Der Begriff des Körpers ist ein zentraler algebraischer Begriff und wird in der Vorlesung *Lineare Algebra* ausführlich behandelt.

Körperaxiom der reellen Zahlen

$$\boxed{[\mathbb{R}, +, \cdot] \text{ ist ein Körper.}}$$

$[\mathbb{Q}, +, \cdot]$ ist ebenfalls ein Körper, während $[\mathbb{Z}, +, \cdot]$ kein Körper ist (zum Beispiel besitzt \mathbb{Z} kein multiplikativ inverses Element in \mathbb{Z}). Ein Körper mit zwei Elementen ist durch $\mathbb{K} := \{0, 1\}$ und die Operationen $0 + 0 := 0$, $0 + 1 = 1 + 0 := 1$, $1 + 1 := 0$, $0 \cdot 0 := 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 := 0$ und $1 \cdot 1 := 1$ gegeben.

Die Rechenregeln, die man aus den Eigenschaften K1-K9 herleiten kann, gelten in *jedem* Körper. Man braucht sie nur einmal zu beweisen. Dies ist der Vorteil dieses abstrakten Konzeptes.

Bezeichnungen: Für n reelle Zahlen x_1, \dots, x_n werden die Summe und das Produkt folgendermaßen abgekürzt:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_i := x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \prod_{i=1}^n x_i := x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Klammern sind wegen K2 und K6} \\ \text{nicht nötig.} \end{array}$$

Für zwei Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ sei

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \subset \mathbb{R}$$

$$A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\} \subset \mathbb{R}$$

$$-A := \{-a \mid a \in A\} \subset \mathbb{R}.$$

Für das Produkt zweier reeller Zahlen a, b schreiben wir auch kurz: $ab := a \cdot b$.

2.1.2 Die Anordnungseigenschaften von \mathbb{R}

Außer $[\mathbb{R}, +, \cdot]$ gibt es noch viele andere Körper. Die Körperaxiome K1-K9 reichen also nicht aus, um \mathbb{R} eindeutig zu beschreiben. Auf dem Körper der reellen Zahlen kann man im Gegensatz zu einigen anderen Körpern zusätzlich eine Anordnung einführen.

Anordnungseigenschaften von \mathbb{R}

Der Körper der reellen Zahlen $[\mathbb{R}, +, \cdot]$ enthält eine Teilmenge von "positiven" reellen Zahlen \mathbb{R}^+ mit folgenden Eigenschaften:

A1: Für jede reelle Zahl x gilt entweder $x = 0$ oder $x \in \mathbb{R}^+$ oder $x \in -\mathbb{R}^+$,
das heißt \mathbb{R} ist die disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{R} = -\mathbb{R}^+ \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} \mathbb{R}^+.$$

A2: Ist $x, y \in \mathbb{R}^+$, so gilt $x + y \in \mathbb{R}^+$ und $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.

Definition 2.2. Ein Körper $[\mathbb{K}, +, \cdot]$, in dem eine Teilmenge “positiver Elemente” $\mathbb{K}^+ \subset \mathbb{K}$ existiert, so dass A1 und A2 gelten, heißt angeordneter Körper².

Anordnungsaxiom der reellen Zahlen

Die reellen Zahlen $[\mathbb{R}, +, \cdot]$ sind ein angeordneter Körper.

Mittels der Eigenschaften A1 und A2 kann man Elemente von \mathbb{R} vergleichen.

Definition 2.3. Man sagt “ x ist kleiner gleich y ” und schreibt $x \leq y$, falls $y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Aus den Anordnungseigenschaften A1 und A2 erhält man die folgenden Eigenschaften der Relation \leq :

O1: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

O2: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \leq x$

Reflexivität

O3: Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$

Antisymmetrie

O4: Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$

Transitivität

Aus A1 und A2 folgen außerdem folgende Monotonieeigenschaften von \leq :

M1: Aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

M2: Aus $x \leq y$ folgt $x \cdot z \leq y \cdot z$ für alle $z \in \mathbb{R}^+$.

Bezeichnung:

- Gilt $x \leq y$ und $x \neq y$, so schreibt man auch $x < y$ (sprich: “ x kleiner als y ”).
- $x \geq y : \iff y \leq x$ bzw. $x > y : \iff y < x$.

Insbesondere gilt: Aus $x < y$ folgt $a \cdot x > a \cdot y$ für alle $a \in -\mathbb{R}^+$.

Mittels der Ordnungsrelation können wir Intervalle definieren:

Für $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$, sei

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad (\text{abgeschlossenes Intervall})$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \quad (\text{halboffenes Intervall})$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad (\text{halboffenes Intervall})$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad (\text{offenes Intervall})$$

Des Weiteren seien

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}.$$

² Wobei hier in A1 und A2 natürlich \mathbb{R} durch \mathbb{K} und \mathbb{R}^+ durch \mathbb{K}^+ zu ersetzen ist.

Sei I eines der Intervalle $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$, oder $(a, b]$. Dann heißt die Zahl $L(I) := b - a$ *Länge des Intervalls I* .

Definition 2.4. *Unter dem Betrag einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ versteht man die Zahl*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Ist I ein Intervall der Länge L , so gilt für $x, y \in I$: $|x - y| \leq L$.

Satz 2.1 *Für den Betrag einer reellen Zahl gelten folgende Eigenschaften:*

- (1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
- (2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$
- (3) $|x + y| \leq |x| + |y|.$ (Dreiecksungleichung)
- (4) $||x| - |y|| \leq |x + y|.$

Beweis. (1) und (2) folgen unmittelbar aus der Definition des Betrages $|\cdot|$.

Zum Beweis von (3) benutzen wir die Monotonieeigenschaften. Wegen $x \leq |x|$ und $-x \leq |x|$ bzw. $y \leq |y|$ und $-y \leq |y|$ folgt nach Addition dieser Gleichungen $x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x + y) \leq |x| + |y|$ und folglich $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Zum Beweis von (4) benutzen wir die Dreiecksungleichung und $|x| = |-x|$:

$$\begin{aligned} |x| &= |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y|, & \text{und daher } |x| - |y| &\leq |x + y|, \\ |y| &= |(x + y) - x| \leq |x + y| + |x|, & \text{und daher } |y| - |x| &\leq |x + y|. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $||x| - |y|| \leq |x + y|$. □

Die bisherigen Eigenschaften (Körpereigenschaften K1-K9, Anordnungseigenschaften A1-A2) bestimmen $[\mathbb{R}, +, \cdot]$ noch immer nicht eindeutig. Sie gelten zum Beispiel auch für den Körper der rationalen Zahlen $[\mathbb{Q}, +, \cdot]$. Die reellen Zahlen \mathbb{R} haben aber eine grundsätzlich andere Eigenschaft als die rationalen Zahlen \mathbb{Q} : die Vollständigkeit.

2.1.3 Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten die Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen zu beschreiben. Alle diese sind äquivalent. Wir benutzen hier die Existenz der Schnitzzahl von Dedekindschen Schnitten.

Definition 2.5. *Ein Dedekindscher Schnitt³ von \mathbb{R} ist eine Zerlegung $\mathbb{R} = A \dot{\cup} B$ der reellen Zahlen in zwei disjunkte, nichtleere Teilmengen A und B mit der Eigenschaft, dass jedes Element $a \in A$ kleiner als jedes Element $b \in B$ ist, das heißt,*

$$a < b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

³ Richard Dedekind [1831-1916], deutscher Mathematiker, letzter Schüler von Carl Friedrich Gauss. Er hat 1872 die erste exakte Definition der reellen Zahlen mit Hilfe der jetzt sogenannten "Dedekindschen Schnitte" angegeben. Die Konstruktion der reellen Zahlen mit Hilfe von Dedekindschen Schnitten findet man im Buch von Oliver Deiser: *Analysis 1*.

Bezeichnung für Dedekindsche Schnitte: $(A | B)$

Die Definition eines Dedekindschen Schnittes ist in jedem angeordneten Körper möglich, da eine Relation “<” definiert ist; zum Beispiel in $[\mathbb{Q}, +, \cdot]$.

Beispiel: Sei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

$$\left. \begin{array}{l} A = (-\infty, a], \quad B = (a, \infty) \\ A = (-\infty, a), \quad B = [a, \infty) \end{array} \right\} \quad (A | B) \text{ sind Dedekindsche Schnitte.}$$

Definition 2.6. Sei $(A | B)$ ein Dedekindscher Schnitt von \mathbb{R} . Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *Schnittzahl* von $(A | B)$, falls $a \leq s \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Wegen $\mathbb{R} = A \cup B$, ist s entweder das größte Element von A (falls $s \in A$) oder das kleinste Element von B (falls $s \in B$).

Vollständigkeitsaxiom (V) der reellen Zahlen

Jeder Dedekindsche Schnitt $(A | B)$ von \mathbb{R} besitzt eine Schnittzahl

Die Vollständigkeitseigenschaft gilt nicht in jedem angeordneten Körper, zum Beispiel nicht im Körper $[\mathbb{Q}, +, \cdot]$: Seien nämlich $A = (-\infty, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ und $B = (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$. Dann gilt $\mathbb{Q} = A \cup B$. Somit bilden A und B einen Dedekindschen Schnitt von \mathbb{Q} . Dieser hat aber in \mathbb{Q} *keine* Schnittzahl. (Wir werden noch sehen, dass die Zahl $\sqrt{2}$ nicht rational ist).

Definition 2.7. Ein angeordneter Körper $[\mathbb{K}, +, \cdot]$ mit der Eigenschaft (V), das heißt in dem jeder Dedekindsche Schnitt eine Schnittzahl hat, heißt *vollständig*.

Zusammenfassung:

Die reellen Zahlen $[\mathbb{R}, +, \cdot]$ bilden einen vollständigen, angeordneten Körper.

Zwei vollständige, angeordnete Körper $[\mathbb{K}_1, +, \cdot]$ und $[\mathbb{K}_2, +, \cdot]$ sind isomorph⁴ (dies beweisen wir hier nicht). Somit sind die reellen Zahlen $[\mathbb{R}, +, \cdot]$ (bis auf Isomorphie) der einzige vollständige, angeordnete Körper. Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind somit durch die Körpereigenschaften K1-K9, die Anordnungseigenschaften A1, A2 und die Vollständigkeitseigenschaft V (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt.

Wir beweisen nun einige Eigenschaften der reellen Zahlen, die aus der Vollständigkeitseigenschaft (V) folgen.

⁴ Diesen Begriff werden Sie in der Vorlesung *Lineare Algebra* kennenlernen. Er bedeutet anschaulich, dass man solche Körper nicht unterscheiden kann, sie besitzen exakt die gleiche algebraische Struktur.

Definition 2.8.

1. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt von oben beschränkt, falls eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a \leq M$ für alle $a \in A$ gilt. Eine solche Zahl M heißt obere Schranke von A .
2. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt von unten beschränkt, falls eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $m \leq a$ für alle $a \in A$ gilt. Eine solche Zahl m heißt untere Schranke von A .
3. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls sie sowohl von unten als auch von oben beschränkt ist.

Definition 2.9. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge.

1. Eine Zahl $M_0 \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von A , falls sie die kleinste obere Schranke von A ist, das heißt falls
 - a) $a \leq M_0 \quad \forall a \in A$,
 - b) für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $a \in A$, so dass $M_0 - \varepsilon < a$.
2. Eine Zahl $m_0 \in \mathbb{R}$ heißt Infimum von A , falls sie die größte untere Schranke von A ist, das heißt falls
 - a) $m_0 \leq a \quad \forall a \in A$,
 - b) für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $a \in A$, so dass $a < m_0 + \varepsilon$.

Bezeichnung: Falls das Supremum bzw. das Infimum einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ existiert, so bezeichnen wir es mit

$$\sup A := \text{Supremum von } A, \quad \inf A := \text{Infimum von } A.$$

Offensichtlich existiert höchstens ein Supremum und höchstens ein Infimum einer Menge $A \subset \mathbb{R}$. Aus der Vollständigkeitseigenschaft von \mathbb{R} erhält man die folgende Aussage über die Existenz von Supremum bzw. Infimum.

Satz 2.2 Jede nach oben beschränkte, nichtleere Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum. Jede nach unten beschränkte, nichtleere Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.

Beweis. (1) Sei $A \subset \mathbb{R}$ von oben beschränkt. Wir betrachten die Menge

$$X := \{M \in \mathbb{R} \mid a \leq M \quad \forall a \in A\}.$$

Da A von oben beschränkt ist, ist $X \neq \emptyset$. Es sei $Y := \mathbb{R} \setminus X$. Dann gilt:

- a) $\mathbb{R} = Y \dot{\cup} X$.
- b) Sei $y \in Y$ und $x \in X$. Da $y \notin X$, existiert ein $a \in A$ mit $y < a$. Andererseits ist $a \leq x$ nach Definition von X . Folglich gilt $y < x$ für alle $y \in Y$ und $x \in X$.

Also ist $(Y \mid X)$ ein Dedekindscher Schnitt von \mathbb{R} . Nach dem Vollständigkeitsaxiom (V) von \mathbb{R} existiert eine Schnittzahl M_0 dieses Dedekindschen Schnittes, also eine Zahl $M_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$y \leq M_0 \leq x \quad \forall y \in Y, x \in X.$$

Wir zeigen, dass die Schnitzzahl M_0 in X liegt. Wir führen diesen Beweis indirekt. Wir nehmen an, dass $M_0 \notin X$ und führen dies zum Widerspruch. Ist $M_0 \notin X$, so ist M_0 das größte Element von Y . Nach Definition von Y gibt es ein $a_0 \in A$ mit $M_0 < a_0$. Dann ist wegen der Monotonieeigenschaft von $<$ aber auch

$$M_0 < \frac{M_0 + a_0}{2} < \frac{a_0}{2} + \frac{a_0}{2} = a_0$$

und folglich

$$\frac{M_0 + a_0}{2} \in Y.$$

Dann kann M_0 aber nicht das größte Element von Y sein, d.h. wir erhalten wir einen Widerspruch. Unsere Annahme war demnach falsch. Folglich ist $M_0 \in X$, also eine obere Schranke von A . Als Schnitzzahl von $(Y \mid X)$ ist M_0 das kleinste Element von X , also die kleinste obere Schranke von A . Das zeigt, dass $M_0 = \sup A$.

Der Beweis der 2. Aussage des Satzes wird analog geführt. \square

Definition 2.10.

1. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Menge. Liegt das Supremum von A in A , so nennt man es auch das Maximum von A und schreibt dafür $\max A$.
2. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nach unten beschränkte Menge. Liegt das Infimum von A in A , so nennt man es auch das Minimum von A und schreibt dafür $\min A$.

Wir leiten aus Satz 2.2 einige Folgerungen ab.

Folgerung 2.1 (Archimedisches Axiom der reellen Zahlen)

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nicht nach oben beschränkt, das heißt zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$. Das gleiche gilt auch für jede unendliche Teilmenge $N \subset \mathbb{N}$.

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen \mathbb{N} ist nach oben beschränkt. Dann existiert nach Satz 2.2 das Supremum $M_0 = \sup \mathbb{N}$. Es sei $M := M_0 - \frac{1}{2}$. Da M_0 die kleinste obere Schranke ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$, mit $M_0 - \frac{1}{2} < m$. Folglich ist

$$M_0 < m + \frac{1}{2} < m + 1.$$

Da aber $m + 1 \in \mathbb{N}$ ist, kann M_0 keine obere Schranke sein. Dies ergibt den Widerspruch. Den Beweis für $N \subset \mathbb{N}$ führt man analog. \square

Folgerung 2.2

1. Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
2. Zu jedem $q \in \mathbb{N}, q \neq 1$, und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{q^n} < \varepsilon$

Beweis. Zu 1) Zur Zahl $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ existiert nach dem Archimedischen Axiom ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Folglich gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Zum Beweis der 2. Aussage setzen wir

$$N := \{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

N ist eine unendliche Teilmenge von \mathbb{N} . Den Beweis kann man dann analog zu 1) führen. \square

Folgerung 2.3 *Sei $A \subset \mathbb{Z}$ eine nichtleere, nach oben (unten) beschränkte Menge ganzer Zahlen. Dann besitzt A ein Maximum (Minimum).*

Beweis. Sei A nach unten beschränkt und $d = \inf A$. Nach dem Archimedischen Axiom existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|d| < n_0$. Also gilt $-n_0 < d$ und somit $0 < d + n_0 \leq a + n_0$ für alle $a \in A$. Betrachten wir nun die Menge $A_0 := \{a + n_0 \mid a \in A\} \subset \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass diese Menge ein kleinstes Element besitzt. Sei $k \in A_0$ und bezeichne $(A_0)_k := \{x \in A_0 \mid x \leq k\}$. Die Menge $(A_0)_k$ ist endlich und besitzt deshalb ein kleinstes Element m_0 (siehe Übungsaufgaben). Dann ist m_0 auch das kleinste Element von A_0 und $m_0 - n_0$ das kleinste Element von A . Folglich gilt $m_0 - n_0 = \min A$.

Ist A von oben beschränkt, so ist $\max A = -\min(-A)$. \square

Satz 2.3 (Die Teilmenge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ liegt dicht in \mathbb{R})

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $x < y$. Dann existiert eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.

Beweis. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < y - x$ und setzen

$$A := \{z \in \mathbb{Z} \mid z > n \cdot x\}.$$

Wiederum nach dem Archimedischen Axiom ist A nicht leer und besitzt, da von unten beschränkt, ein Minimum (Folgerung 2.3). Sei $m_0 = \min A$. Dann gilt $m_0 \in A$ und $m_0 - 1 \notin A$. Folglich ist $\frac{m_0}{n} > x$ und $\frac{m_0 - 1}{n} \leq x$. Wir erhalten somit

$$x < \frac{m_0}{n} = \frac{m_0 - 1}{n} + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y$$

und folglich liegt die rationale Zahl $q := \frac{m_0}{n}$ im Intervall (x, y) . \square

Definition 2.11. *Eine Familie abgeschlossener Intervalle $I_n \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, heißt Intervallschachtelung, wenn gilt:*

1. $I_n \subset I_m \quad \forall n > m$
2. Zu jeder positiven Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $L(I_n) < \varepsilon$.

Satz 2.4 (Prinzip der Intervallschachtelung)

Sei $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ eine Intervallschachtelung. Dann existiert genau eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, so dass $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}.$$

Beweis.

1. *Existenz:* Sei $I_n = [a_n, b_n]$. Da $I_n \subset I_m$ für alle $n \geq m$, folgt

$$a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m. \quad (*)$$

Wir betrachten die Menge der unteren Intervallgrenzen

$$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}.$$

A ist nach oben beschränkt, zum Beispiel durch b_1 , hat also nach Satz 2.2 ein Supremum. Sei $x = \sup A$. Wir zeigen, dass $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition ist $a_n \leq x$. Es bleibt zu zeigen, dass $x \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Angenommen $x > b_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Da x die kleinste obere Schranke von A ist, kann b_m keine obere Schranke von A sein. Somit existiert ein $a_n \in A$, so dass $a_n > b_m$. Dies widerspricht aber der Schachtelungseigenschaft (*). Folglich war die Annahme falsch, das heißt $x \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit gilt $a_n \leq x \leq b_n$, also $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. *Eindeutigkeit:* Angenommen es gäbe zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ und $x, y \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon = |x - y| > 0$. Dann existiert ein Intervall I_{n_0} mit $L(I_{n_0}) < \varepsilon$. Da $|x - y| > L(I_{n_0})$, können aber nicht beide Zahlen x, y in I_{n_0} liegen. Damit ist die Eindeutigkeit von x gezeigt. \square

Bemerkung: Die Vollständigkeitseigenschaft eines angeordneten Körpers kann man durch das Intervallschachtelungsprinzip oder die Existenz des Supremums ersetzen.

Es gilt: Sei $[\mathbb{K}, +, \cdot]$ ein angeordneter Körper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Jeder Dedekindsche Schnitt von \mathbb{K} besitzt eine Schnitzzahl.
2. Jede nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{K} besitzt ein Supremum.
3. Es gilt das Intervallschachtelungsprinzip und das Archimedische Axiom.

Die Implikation: 1. \implies 2. \implies 3. haben wir bewiesen. Die Umkehrung werden wir hier nicht beweisen.

2.1.4 Die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen

Wir beweisen mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms, dass die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar ist. Dazu zunächst einige Definitionen.

Definition 2.12. Eine Menge A heißt abzählbar, wenn es eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ von der Menge der natürlichen Zahlen auf die Menge A gibt.

Die bijektive Abbildung f liefert uns eine Abzählvorschrift für A : Mit der Bezeichnung $a_n := f(n)$ ist nämlich

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \quad \text{mit } a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j.$$

Definition 2.13. Eine Menge A heißt überabzählbar, wenn sie weder leer, noch endlich oder abzählbar ist. Ist eine Menge A leer, endlich oder abzählbar, so sagen wir auch A ist höchstens abzählbar.

Beispiele:

1. Die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} und die Menge \mathbb{N}_0 sind abzählbar.
2. Die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} ist abzählbar, denn

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}} : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ 2k &\longmapsto k \\ 2k + 1 &\longmapsto -k \end{aligned}$$

ist eine bijektive Abbildung zwischen \mathbb{N} und \mathbb{Z} .

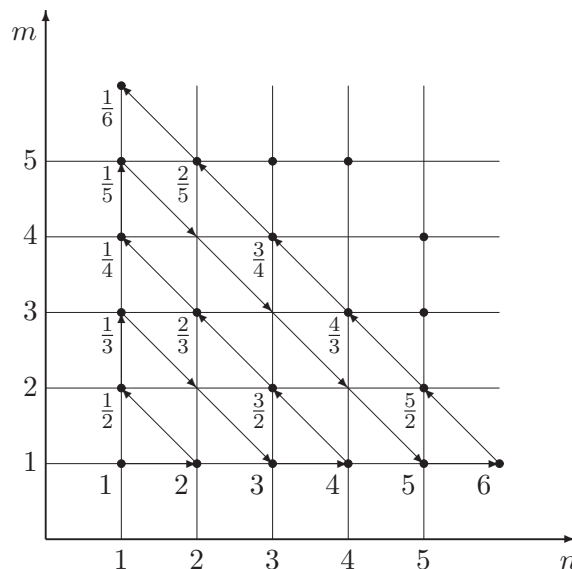
Satz 2.5 Die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen ist abzählbar.

Beweis. (1. Cantorsches Diagonalverfahren).

Wir geben zunächst eine Abzählvorschrift der Menge \mathbb{Q}^+ der positiven rationalen Zahlen an. Jede Zahl $q \in \mathbb{Q}^+$ sei als Bruch dargestellt:

$$q = \frac{n}{m}, \quad n, m \text{ teilerfremde natürliche Zahlen.}$$

Wir betrachten das folgende Schema, das die Paare (n, m) als Punkte eines ebenen Gitters darstellt. Dabei werden Punkte ausgelassen, für die m und n nicht teilerfremd sind.



Die Gitterpunkte werden nun längs des im Gitter gezeichneten Streckenzuges nummeriert. Dadurch erreicht man alle Punkte des konstruierten Gitters und erhält somit eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$.

Diese Abzählung beginnt offensichtlich mit:

$$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 5, \dots$$

Wir erweitern nun φ zu einer bijektiven Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ mittels

$$\phi(n) := \begin{cases} \varphi(n) & \text{falls } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{falls } n = 0 \\ -\varphi(-n) & \text{falls } n \in \mathbb{Z}, n < 0. \end{cases}$$

Die Abbildung $\phi \circ f_{\mathbb{Z}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ bildet \mathbb{N} bijektiv auf \mathbb{Q} ab. Somit ist \mathbb{Q} abzählbar. \square

Satz 2.6 Die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis. Angenommen, es existiert eine Abzählung von \mathbb{R} , d.h. es gilt

$$\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

Zu dieser Abzählung konstruieren wir induktiv eine Intervallschachtelung

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset I_5 \supset \dots$$

Es sei

$$I_1 := [x_1 + 1, x_1 + \frac{4}{3}].$$

Offensichtlich ist $x_1 \notin I_1$ und $L(I_1) = \frac{1}{3}$. Aus einem schon vorhandenen Intervall I_n konstruieren wir I_{n+1} wie folgt: Wir teilen I_n in drei gleichlange, abgeschlossene Intervalle und wählen als I_{n+1} eines dieser Teilintervalle, das x_{n+1} nicht enthält. Für die so konstruierte Folge von Intervallen gilt

$$\begin{aligned} I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \dots \\ x_n \notin I_n \\ L(I_1) = \frac{1}{3}, L(I_2) = \frac{1}{3^2}, \dots, L(I_n) = \frac{1}{3^n}, \dots \end{aligned}$$

Nach Folgerung 2.2 existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $L(I_{n_0}) < \varepsilon$. Somit ist $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ eine Intervallschachtelung von \mathbb{R} . Nach dem Intervallschachtelungsprinzip enthält der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ genau eine reelle Zahl. Sei nun $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ diese Zahl. Nach Annahme war $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$. Es muß also ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x = x_{k_0}$ geben. Dann ist $x_{k_0} \in I_{k_0}$. Dies widerspricht aber der Konstruktion der Intervalle. Somit war die Annahme der Abzählbarkeit von \mathbb{R} falsch. \square

Definition 2.14. Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig, falls eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ existiert. Die Menge B hat eine größere Mächtigkeit als A , falls A zu einer Teilmenge von B gleichmächtig ist, aber B zu keiner Teilmenge von A .

Die Mengen \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} sind gleichmächtig. Die Menge \mathbb{R} hat eine größere Mächtigkeit als diese drei Mengen. Es gibt Mengen, die eine größere Mächtigkeit als \mathbb{R} haben (z.B. die Potenzmengen $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ – siehe Übung).

Kontinuumshypothese : *Es gibt keine Menge A , deren Mächtigkeit größer als die von \mathbb{N} und kleiner als die von \mathbb{R} ist.*

Diese Hypothese wurde 1878 von Georg Cantor [1845–1918] aufgestellt. Sie leitete die Entwicklung der Mengenlehre ein. Auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1900 in Paris hat David Hilbert [1862-1943] seine berühmte Liste von 23 ungelösten mathematischen Problemen vorgestellt. Die Kontinuumshypothese steht dabei an 1. Stelle. Inzwischen weiß man, dass sie auf der Basis der heute zugrundegelegten Axiome der Mengenlehre weder beweisbar noch widerlegbar. Kurt Gödel [1906-1978] hat 1939 gezeigt, dass sie nicht widerlegbar ist, Paul Cohen [1934-2007] hat 1963 gezeigt, dass sie auch nicht beweisbar ist (dafür hat er 1966 die Fields-Medaille bekommen). Solche Fragen werden in der *mathematischen Logik* behandelt.

2.1.5 Wurzeln und Potenzen reeller Zahlen

In diesem Abschnitt behandeln wir einige wichtige Gleichungen und Ungleichungen für Potenzen und Wurzeln reeller Zahlen.

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Die Potenz x^n für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir induktiv durch:

$$x^0 := 1, \quad x^1 := x, \quad x^2 := x \cdot x, \quad \dots, \quad x^{n+1} := x^n \cdot x.$$

Für $x \neq 0$ setzen wir

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}.$$

Damit ist die k -te Potenz x^k für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ und jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, definiert. Aus den Körper- und Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen folgt sofort

1. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt

$$x^k \cdot x^l = x^{k+l}, \quad x^{k \cdot l} = (x^k)^l \quad \text{und} \quad (x \cdot y)^k = x^k \cdot y^k.$$

2. Ist $0 < x < y$, dann gilt $x^n < y^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.7 (Binomischer Satz) *Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über n :

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt die Aussage, denn: $\binom{1}{0}x^0 \cdot y^1 + \binom{1}{1}x^1 \cdot y^0 = y + x = (x + y)^1$.

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

Induktionsbehauptung:

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \cdot y^{n-k+1}.$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)^n \cdot (x + y) \\ &\stackrel{IV}{=} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k} \right) \cdot (x + y) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot x \cdot y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k} \cdot y \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} \cdot y^{n+1-(k+1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n+1-k} \\ &= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} x^l \cdot y^{(n+1)-l} + \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^l \cdot y^{(n+1)-l} \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\binom{n}{l} + \binom{n}{l-1} \right) x^l \cdot y^{(n+1)-l} + \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\ &\stackrel{1,12}{=} \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} x^l \cdot y^{(n+1)-l}. \end{aligned}$$

□

Aus dem Binomischen Satz 2.7 ergibt sich die

Folgerung 2.4

1. $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k,$
2. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$
3. $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

Beweis. (1) ist der Binomische Satz für $y = 1$, (2) ist der Binomischer Satz für $x = y = 1$ und (3) ist der Binomischer Satz für $x = -1$, $y = 1$. □

Satz 2.8 (Bernoullische Ungleichung) Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Beweis durch vollständige Induktion über n .

Induktionsanfang: Die Aussage gilt offensichtlich für $n = 1$.

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Induktionsbehauptung: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

Induktionsbeweis: ‘

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \stackrel{IV}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x.$$

□

Als Anwendung erhält man unmittelbar

Folgerung 2.5

1. Sei $y \in \mathbb{R}$, $y > 1$, und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $y^n > r$.
2. Sei $y \in \mathbb{R}$, $0 < y < 1$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y^n < r$.

Beweis. Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $y > 1$. Nach dem Archimedischen Axiom für reelle Zahlen existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so daß $n > \frac{r}{y-1}$. Dann folgt mit der Bernoullischen Ungleichung

$$y^n = (1+(y-1))^n \geq 1+n(y-1) \geq n(y-1) > r.$$

Ist $0 < y < 1$, so wenden wir das eben Bewiesene auf die reelle Zahl $\frac{1}{y} > 1$ und $\frac{1}{r}$ an und erhalten eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{1}{y})^n > \frac{1}{r}$ und somit $y^n < r$. □

Satz 2.9 (Geometrische Summe) Für jede reelle Zahl $x \neq 1$ und jede natürliche Zahl n gilt:

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Beweis. Beweis durch vollständige Induktion über n .

Induktionsanfang: $n = 1$:

$$\frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1+x = x^0 + x^1.$$

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung ist für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Induktionsbehauptung:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) + x^{n+1} \\
&\stackrel{IV}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\
&= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1}(1 - x)}{1 - x} \\
&= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \quad \square
\end{aligned}$$

Wir beweisen nun die Existenz der n -ten Wurzel einer positiven reellen Zahl.

Satz 2.10 Sei $x \in \mathbb{R}^+$ eine positive reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau eine positive reelle Zahl $y \in \mathbb{R}^+$ mit $y^n = x$.

Bezeichnung: $y := \sqrt[n]{x}$ heißt die n -te Wurzel aus x .

Beweis. Zum Beweis benutzen wir das Intervallschachtelungsprinzip. Für $x = 1$ gilt die Behauptung offensichtlich. Es genügt, den Fall $x > 1$ zu behandeln. Den Fall $x < 1$ führt man durch Übergang zu $x' := \frac{1}{x}$ darauf zurück.

Wir definieren zunächst induktiv die folgende Familie abgeschlossener Intervalle $I_k := [a_k, b_k]$: Wir setzen $I_1 = [a_1, b_1] := [1, x]$. Dann gilt $a_1^n \leq x \leq b_1^n$, da $1 < x$. Sei das Intervall $I_k := [a_k, b_k]$ mit der Eigenschaft $a_k^n \leq x \leq b_k^n$ bereits konstruiert. Dann definieren wir I_{k+1} durch Halbierung von I_k : Sei $m = \frac{a_k + b_k}{2}$ der Mittelpunkt von I_k . Wir setzen dann

$$I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] := \begin{cases} [a_k, m] & \text{falls } m^n \geq x \\ [m, b_k] & \text{falls } m^n < x. \end{cases}$$

Dann gilt nach Konstruktion für diese Familie von abgeschlossenen Intervallen:

1. $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$
2. $L(I_k) = (x - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
3. $a_k^n \leq x \leq b_k^n$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wir erhalten also ineinander geschachtelte Intervalle, deren Längen nach Folgerung 2.2 beliebig klein werden. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip existiert genau eine reelle Zahl $y \in \mathbb{R}$ mit $y \in I_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun, dass $y^n = x$ gilt.

Dazu betrachten wir die Intervalle

$$J_k := [a_k^n, b_k^n], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Da $I_k \supset I_{k+1}$, gilt wegen der Monotonie der Potenzen auch $J_k \supset J_{k+1}$. Für die Länge von J_k erhalten wir

$$\begin{aligned}
L(J_k) &= b_k^n - a_k^n \\
&= (b_k - a_k)(b_k^{n-1} + b_k^{n-2}a_k + \dots + b_k a_k^{n-2} + a_k^{n-1}) \\
&= L(I_k) \cdot b_k^{n-1} \left(1 + \frac{a_k}{b_k} + \frac{a_k^2}{b_k^2} + \dots + \frac{a_k^{n-1}}{b_k^{n-1}} \right) \\
&\leq (x - 1) \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \cdot b_1^{n-1} \cdot n.
\end{aligned}$$

Nach Folgerung 2.2 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $L(J_k) < \varepsilon$. Die Familie der Intervalle J_k ist also eine Intervallschachtelung von \mathbb{R} . Nach Konstruktion gilt aber sowohl $x \in J_k$ (Eigenschaft 3.) als auch $y^n \in J_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Da der Durchschnitt $\bigcap_{k=1}^{\infty} J_k$ nur ein Element enthält, folgt $x = y^n$.

Die Eindeutigkeit der Zahl $y \in \mathbb{R}^+$ mit $y^n = x$ ist klar, denn ist z.B. $y_1 < y_2$, so folgt $y_1^n < y_2^n$. \square

Die Gleichung $y^n = x$ hat für gerade n zwei reelle Lösungen $y_1 = \sqrt[n]{x}$ und $y_2 = -\sqrt[n]{x}$. Die Eindeutigkeitsaussage von Satz 2.10 gilt also nur in \mathbb{R}^+ . Die Gleichung $y^n = x$ ist in \mathbb{Q} im Allgemeinen nicht lösbar.

Satz 2.11 *Seien n und k natürliche Zahlen. Dann ist $\sqrt[n]{k}$ genau dann eine rationale Zahl, falls k die n -te Potenz einer natürlichen Zahl ist, das heißt falls $k = m^n$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt:*

- Für jede Primzahl p und jedes $n > 1$ ist die Zahl $\sqrt[n]{p}$ irrational.
- Wenn $\sqrt[n]{k}$ rational ist, so ist $\sqrt[n]{k}$ sogar eine natürliche Zahl.

Beweis.

1. (\Leftarrow): Sei $k = m^n$ mit $m \in \mathbb{N}$. Dann ist per Definition $m := \sqrt[n]{k} \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.

2. (\Rightarrow): Sei $\sqrt[n]{k} \in \mathbb{Q}$. Dann existieren teilerfremde Zahlen $m, l \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[n]{k} = \frac{m}{l}$. Nach Definition erhält man $k = (\frac{m}{l})^n = \frac{m^n}{l^n}$ und somit $kl^n = m^n$. Wir zeigen nun, dass $l = 1$ gilt. Angenommen $l > 1$. Dann existiert eine Primzahl $p > 1$, die l teilt. Folglich teilt p auch $kl^n = m^n$, das heißt p teilt auch m . Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass l und m teilerfremd sind. Somit ist $l = 1$ und $k = m^n$ für $m \in \mathbb{N}$. \square

Wir können jetzt die Potenzen mit rationalen Exponenten definieren.

Definition 2.15. *Sei $x \in \mathbb{R}^+$ eine positive reelle Zahl und $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl mit der Darstellung $q = \frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Dann setzen wir:*

$$x^q := \left(\sqrt[m]{x} \right)^n.$$

Diese Definition ist korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl der Darstellung von q .

Die folgenden Eigenschaften für die Potenzen mit rationalen Exponenten sind leicht nachzuprüfen: Seien $p, q \in \mathbb{Q}$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$. Dann erhält man:

1. $x^q \cdot x^p = x^{p+q}$, $(x^q)^p = x^{p \cdot q}$, $x^q \cdot y^q = (xy)^q$.
2. Sei $p < q$. Dann gilt $x^p < x^q$ falls $x > 1$ und $x^p > x^q$ falls $0 < x < 1$.
3. Sei $0 < x < y$. Dann gilt $x^q < y^q$ falls $q > 0$ und $x^q > y^q$ falls $q < 0$.

Wir werden auf die Potenzen und ihre Eigenschaften später zurückkommen.

2.2 Die komplexen Zahlen

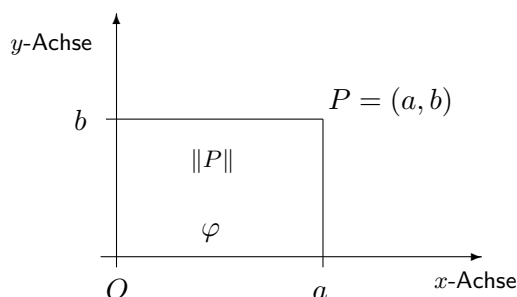
Für jede von Null verschiedene reelle Zahl x gilt $x^2 > 0$. Man kann im Zahlbereich der reellen Zahlen also keine Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen. Insbesondere gibt es keine reelle Lösung der Gleichung $x^2 = -1$. Die komplexen Zahlen sind eine *Erweiterung der reellen Zahlen*, die es möglich macht, auch *Wurzeln aus negativen Zahlen zu ziehen*.

2.2.1 Geometrische Motivation für die Definition der komplexen Zahlen

Bevor wir die Definition der komplexen Zahlen angeben, wollen wir eine geometrische Motivation für diese Definition angeben. Wir suchen eine Erweiterung von \mathbb{R} , in der wir die Gleichung $x^2 = -1$ lösen können. Die reellen Zahlen können wir geometrisch als Punkte auf einer Geraden (reelle Zahlengerade) darstellen. Wir erweitern nun diese Gerade zu einer Euklidischen Ebene \mathcal{E} und führen auf dieser Ebene auf geometrische Weise eine Addition sowie eine Multiplikation von Punkten so ein, dass es einen Punkt gibt, für den die Gleichung $P \cdot P = -1$ gilt. Dazu fixieren wir auf der Ebene \mathcal{E} ein kartesisches Koordinatensystem, so dass die x -Achse der reellen Zahlengeraden entspricht. Dadurch können wir die Ebene \mathcal{E} mit der Menge der geordneten 2-Tupel reeller Zahlen \mathbb{R}^2 identifizieren: jedem Punkt $P \in \mathcal{E}$ werden seine Koordinaten $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ in diesem kartesischen Koordinatensystem zugeordnet (Euklidische Koordinaten). Der Ursprung $O \in \mathcal{E}$ hat dabei die Koordinaten $(0, 0)$. Die reellen Zahlen entsprechen der Geraden $g = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Dies liefert eine naheliegende Möglichkeit, zwei Punkte der Ebene zu addieren: man addiert ihre Euklidischen Koordinaten: Für $P_1 = (a_1, b_1)$ und $P_2 = (a_2, b_2)$ sei

$$P_1 + P_2 := (a_1 + a_2, b_1 + b_2). \quad (2.1)$$

Das ist verträglich mit der Addition in den "reellen Zahlen" $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Würde man die Multiplikation von Punkten auf die analoge Weise definieren, würde man nichts gewinnen. Man könnte die Gleichung $P \cdot P = (-1, 0)$ nicht lösen. Für eine geeignete Definition der Multiplikation benutzen wir die Euklidische Drehung von Punkten um den Ursprung O . Dazu erinnern wir an die Darstellung eines Punktes der Ebene durch Polarkoordinaten: Ist $P \neq O$, so ist P eindeutig durch die Länge der Strecke \overline{OP} , sowie den orientierten Winkel φ zwischen der x -Achse und dem Stahl \overrightarrow{OP} (gemessen entgegen dem Uhrzeigersinn) bestimmt.



Dabei gilt für $P = (a, b)$ nach dem Satz des Pythagoras sowie der elementargeometrischen Definition der Sinus- und Cosinus-Funktion im rechtwinkligen Dreieck⁵:

$$\begin{aligned} |\overline{OP}| &= \sqrt{a^2 + b^2} =: \|P\|, \\ P &= (a, b) = (\|P\| \cos \varphi, \|P\| \sin \varphi). \end{aligned}$$

Für die "reellen Zahlen" $P = (x, 0)$ gilt $\|P\| = |x|$ und $\varphi = 0$, falls x positiv, bzw. $\varphi = 180^\circ$, falls x negativ ist. Wir multiplizieren nun zwei Punkte

$$\begin{aligned} P_1 &= (a_1, b_1) = (\|P_1\| \cos \varphi_1, \|P_1\| \sin \varphi_1) \quad \text{und} \\ P_2 &= (a_2, b_2) = (\|P_2\| \cos \varphi_2, \|P_2\| \sin \varphi_2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

durch die Forderung, dass sich ihre Abstände $\|P_1\|$ und $\|P_2\|$ multiplizieren sowie ihre Winkel φ_1 bzw φ_2 addieren:

$$P_1 \cdot P_2 := (\|P_1\| \cdot \|P_2\| \cos(\varphi_1 + \varphi_2), \|P_1\| \cdot \|P_2\| \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (2.3)$$

Dies ist verträglich mit der Multiplikation in den "reellen Zahlen" $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Nun "sieht" man aber sehr einfach einen Punkt P der Ebene mit $P \cdot P = (-1, 0)$, nämlich den Punkt P mit den Polarkoordinaten $\|P\| = 1$ und $\varphi = 90^\circ$. Für diesen Punkt gilt

$$P \cdot P = (\cos 180^\circ, \sin 180^\circ) = (-1, 0).$$

Benutzt man die Additionstheoreme für die Cosinus- und Sinusfunktion⁶:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \end{aligned}$$

so erhält man mit (2.2) folgende Formel, die das Produkt $P_1 \cdot P_2$ in Euklidischen Koordinaten ausdrückt:

$$\begin{aligned} P_1 \cdot P_2 &= (\|P_1\| \|P_2\| (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2), \|P_1\| \|P_2\| (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, b_1 a_2 + a_1 b_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Diese geometrische Motivation führt uns zu der folgenden *Definition* der komplexen Zahlen, die vom irischen Mathematiker und Physiker William R. Hamilton [1805 – 1865] eingeführt wurde. Hamilton hat auf analoge Weise auch den Zahlbereich der komplexen Zahlen erweitert und den Schiefkörper der Quaternionen eingeführt, der wie die komplexen Zahlen nicht nur in der Mathematik, sondern auch für viele Belange der Physik nützlich ist.

⁵ Man setzt dazu die im rechtwinkligen Dreieck definierte Cosinus- und Sinusfunktion auf $[0^\circ, 360^\circ]$ fort durch: $\cos 0^\circ := 1$, $\sin 0^\circ := 0$, $\cos 90^\circ := 0$, $\sin 90^\circ := 1$ sowie $\cos(\varphi + 90^\circ) := -\sin \varphi$, $\sin(\varphi + 90^\circ) := \cos \varphi$. Anschließend setzt man sie 360° -periodisch auf \mathbb{R}° fort.

⁶ Bitte wiederholen Sie selbständig die elementargeometrischen Beweise der Additionstheoreme. Man findet sie z.B. im Buch von Helmut Koch: *Einführung in die Mathematik*, Springer 2004, Kapitel 8.

2.2.2 Definition und Eigenschaften der komplexen Zahlen

Auf der Menge der Paare reeller Zahlen

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

führen wir eine Addition $+$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und eine Multiplikation \cdot : $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein. Zwei Paare $z_1 = (a_1, b_1)$ und $z_2 = (a_2, b_2)$ aus \mathbb{R}^2 addieren bzw. multiplizieren wir (motiviert durch (2.1) und (2.4)) nach folgenden Regeln:

$$z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad (2.5)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, b_1 a_2 + a_1 b_2). \quad (2.6)$$

Die mit dieser Addition und Multiplikation ausgestattete Menge \mathbb{R}^2 bezeichnet man mit dem neuen Symbol \mathbb{C} , d.h. $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$, um auszudrücken, dass man außer der üblichen Addition (2.5) der reellen Paare auch noch die Multiplikation (2.6) festgelegt hat. Die Elemente von \mathbb{C} heißen *komplexe Zahlen*.

Satz 2.12 *Die komplexen Zahlen $[\mathbb{C}, +, \cdot]$ bilden einen Körper. Es gelten also die Rechenregeln K1 – K9 für die Addition $+$ und die Multiplikation \cdot .*

Beweis. Diese Eigenschaften folgen direkt aus den Körpereigenschaften von \mathbb{R} und den Definitionen von $+$ und \cdot . Man erhält z.B. durch direktes Nachrechnen: $(0, 0)$ ist das neutrale Element der Addition, $(1, 0)$ das neutrale Element der Multiplikation. Das Negative zu $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ ist $-z := (-a, -b)$. Das Inverse zu $w = (a, b) \neq (0, 0)$ ist $\frac{1}{w} := \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$, denn es gilt

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{ba-ba}{a^2+b^2}\right) = (1, 0). \quad \square$$

Im Gegensatz zum Körper der reellen Zahlen ist der Körper der komplexen Zahlen nicht angeordnet (Übungsaufgabe).

Potenzen komplexer Zahlen

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ sei $z^{-1} := \frac{1}{z}$. Die Potenzen z^n für $n \in \mathbb{N}$ seien induktiv durch $z^1 := z$, $z^{n+1} := z^n \cdot z$ erklärt. Weiterhin sei $z^{-n} := \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}$. Wir vereinbaren zusätzlich für jedes $z \in \mathbb{C}$, dass $z^0 = 1$. Für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ beweist man wie im Reellen (Satz 2.7) die **binomische Formel**

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die algebraische Form der komplexen Zahlen

Für den bequemen Umgang mit den komplexen Zahlen eignen sich die nun folgenden Vereinbarungen:

Nach Definition gilt für die komplexen Zahlen $(a, 0)$ und $(b, 0)$

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{und} \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0).$$

Die Zuordnung $a \in \mathbb{R} \mapsto (a, 0) \in \mathbb{C}$ ist also eine Einbettung der Menge der reellen Zahlen in die Menge der komplexen Zahlen, die mit den jeweiligen Körperoperationen $+$ und \cdot verträglich ist. Wir können deshalb \mathbb{R} als Teilkörper von \mathbb{C} auffassen. Dies werden wir in Zukunft tun und die komplexe Zahl $(a, 0)$ einfach mit a bezeichnen. Dies rechtfertigt auch die Bezeichnung $0 := (0, 0)$ für das neutrale Element der Addition und $1 := (1, 0)$ für das neutrale Element der Multiplikation. Die komplexe Zahl $(0, 1)$ bezeichnen wir mit i und nennen sie die *imaginäre Einheit*. Für $i = (0, 1)$ gilt

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Die Gleichung $x^2 = -1$ ist also im Körper der komplexen Zahlen lösbar.

Ist $z = (a, b)$ eine beliebige komplexe Zahl, so gilt mit unseren Vereinbarungen

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + i \cdot b.$$

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist also in der Form

$$\boxed{z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}} \quad (2.7)$$

darstellbar. Dies ist die übliche Darstellung der komplexen Zahlen. Man nennt die Darstellung (2.7) auch die *algebraische Form* der komplexen Zahl. Benutzt man diese Darstellung, dann kann man mit den komplexen Zahlen genauso wie mit den reellen Zahlen rechnen, indem man $i^2 = -1$ berücksichtigt. Es gilt also für $z_1 = a_1 + i b_1$ und $z_2 = a_2 + i b_2$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i b_1) + (a_2 + i b_2) = (a_1 + a_2) + i (b_1 + b_2) \quad (2.8)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i b_1) \cdot (a_2 + i b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i (a_1 b_2 + b_1 a_2) \quad (2.9)$$

Definition 2.16. Ist $z = a + ib \in \mathbb{C}$, so heißt $\operatorname{Re}(z) := a$ Realteil von z und $\operatorname{Im}(z) := b$ Imaginärteil von z . Ist $\operatorname{Re}(z) = 0$, so heißt z rein imaginär. Ist $\operatorname{Im}(z) = 0$, so heißt z reell.

Beispiel: Sei $z = a + ib \neq 0$. Dann ist

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2},$$

also gilt

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Definition 2.17. Ist $z = a + ib \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, so heißt $\bar{z} := a - ib$ die konjugiert komplexe Zahl zu z .

Es gelten folgende, mit Hilfe der Definitionen leicht zu überprüfende Rechenregeln:

Satz 2.13 Für alle komplexen Zahlen z und w gilt:

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $z + \overline{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i \cdot \operatorname{Im}(z)$.
3. $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$.
4. $z \cdot \overline{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$. Insbesondere ist $0 \leq z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$. □

Definition 2.18. Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Der Betrag von z ist die reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Satz 2.14 (Eigenschaften des Betrages komplexer Zahlen)

Seien z und w komplexe Zahlen. Dann gilt:

1. $|z| \geq 0$, wobei $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.
2. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
3. $|z + w| \leq |z| + |w|$. (Dreiecksungleichung)
4. $||z| - |w|| \leq |z + w|$.
5. $|z| = |\overline{z}|$
6. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

Beweis. 1., 5. und 6. folgen trivialerweise aus der Definition. Formel 2. folgt aus

$$|z \cdot w|^2 = (zw)(\overline{z\overline{w}}) = z\overline{z} \cdot w\overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2.$$

Die Dreiecksungleichung erhält man durch

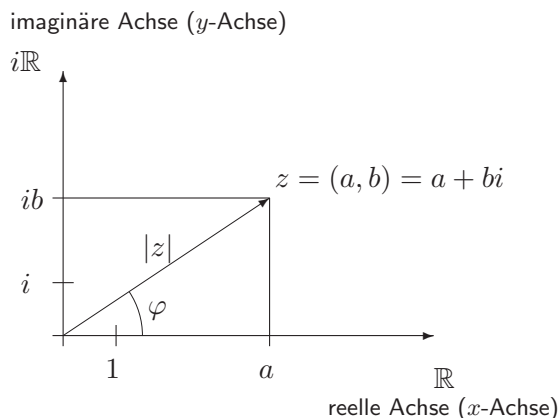
$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) \\ &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\ &= z\overline{z} + w\overline{w} + w\overline{z} + z\overline{w} \\ &= z\overline{z} + w\overline{w} + w\overline{z} + \overline{w\overline{z}} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(w\overline{z}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2 \cdot |w\overline{z}| \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2 \cdot |w| \cdot |z| \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Formel 4 wird wie in Satz 2.1 mit Hilfe der Dreiecksungleichung bewiesen. □

Die Polarform (trigonometrische Darstellung) der komplexen Zahlen

Wir kommen nochmal auf die geometrische Interpretation der komplexen Zahlen zurück. Der Darstellung der reellen Zahlen auf einer Geraden entspricht die Darstellung der komplexen Zahlen in der Ebene, die man deshalb oft Gaußsche Zahlenebene oder komplexe Zahlenebene nennt.

Wir fixieren ein kartesisches Koordinatensystem in der Ebene und stellen die komplexe Zahl $z = (a, b) = a + ib \in \mathbb{C}$ als Punkt der Ebene mit den Koordinaten (a, b) dar.



Die reellen Zahlen \mathbb{R} entsprechen der x -Achse, die rein imaginären Zahlen $i\mathbb{R}$ der y -Achse. Nach dem Satz von Pythagoras ist der Betrag $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ gleich dem Abstand des Punktes $z = (a, b)$ zum Ursprung des Koordinatensystems. Die komplexe Zahl $\bar{z} = (a, -b) = a - ib$ entsteht durch Spiegelung von z an der reellen Achse. Für $z \neq 0$ sei φ der orientierte Winkel zwischen der x -Achse und dem Strahl vom Ursprung durch z , gemessen in positiver Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn). Dann gilt

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} \quad \text{und} \quad \sin \varphi = \frac{b}{|z|}.$$

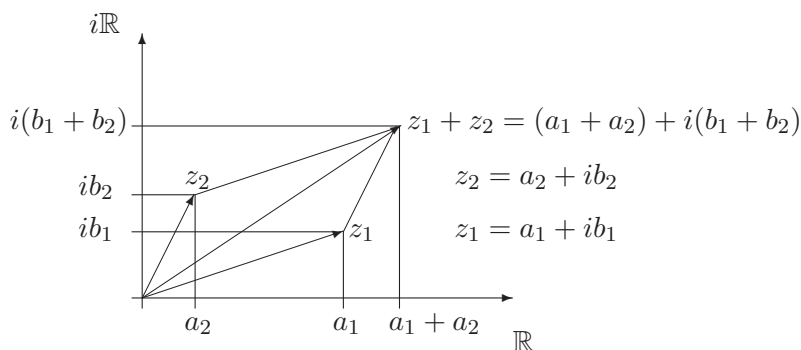
Die Darstellung

$$z = |z| (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \tag{2.10}$$

heißt *trigonometrische Darstellung* oder *Polarform* der komplexen Zahl $z \neq 0$. Der Winkel φ heißt *Argument* von z und wird mit $\arg(z)$ bezeichnet. Das Argument φ ist bis auf ganzzahlige Vielfache von 360° eindeutig bestimmt.

Geometrische Deutung von $z_1 + z_2$:

Die Summe $z_1 + z_2$ entspricht dem Endpunkt der vom Nullpunkt ausgehenden Diagonalen im von z_1 und z_2 gebildeten Parallelogramm.



Geometrische Deutung von $z_1 \cdot z_2$:

Seien $z_1, z_2 \neq 0$. Wir betrachten die trigonometrische Darstellung von z_1 und z_2

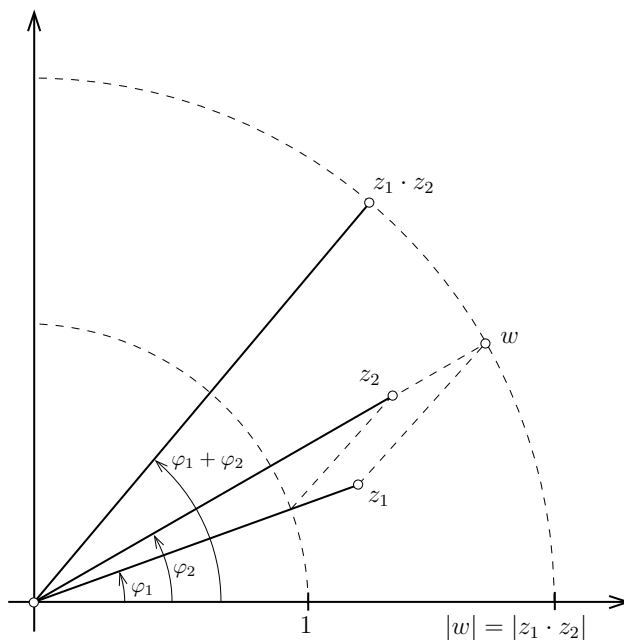
$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \\ z_2 &= |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2). \end{aligned}$$

Nach den Additionstheoremen für \cos und \sin gilt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1||z_2| \cdot \{(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) \\ &\quad + i \cdot (\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1)\} \\ &= |z_1 \cdot z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

und folglich $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ und $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Nach diesen Formeln kann $z_1 \cdot z_2$ gezeichnet werden.



Für die Winkel gilt $\varphi_1 = \arg(z_1)$ und $\varphi_2 = \arg(z_2)$. Der Punkt $z_1 \cdot z_2$ liegt auf dem vom Ursprung ausgehenden Strahl, der mit der reellen Achse \mathbb{R} den Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$ einnimmt. Mittels des Strahlensatzes erhält man einen Punkt w auf dem Strahl durch den Ursprung und z_2 mit $|w| = |z_1||z_2| = |z_1 \cdot z_2|$. Man dreht diesen Punkt w um den Winkel φ_1 um den Ursprung und erhält den Punkt $z_1 \cdot z_2$.

Wurzeln aus komplexen Zahlen

Wir definieren nun Wurzeln aus von Null verschiedenen komplexen Zahlen. Wie wir gerade gesehen haben, gelten für eine komplexe Zahl $z \neq 0$ die Formeln

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{und} \quad \arg(z^n) = n \cdot \arg(z).$$

Damit erhalten wir

Satz 2.15 Sei $w \in \mathbb{C}$ eine von Null verschiedene komplexe Zahl mit dem Betrag $r := |w|$ und dem Argument $\varphi := \arg(w) \in [0, 360^\circ)$, d.h. $w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Dann hat die Gleichung $z^n = w$ genau n verschiedene komplexe Lösungen, nämlich

$$z_k := \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + k \frac{360^\circ}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + k \frac{360^\circ}{n} \right) \right),$$

wobei $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Beweis. Für die komplexen Zahlen z_k gilt nach Definition

$$|z_k| = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \arg(z_k) = \frac{\varphi}{n} + k \frac{360^\circ}{n} =: \varphi_k.$$

Hieraus folgt

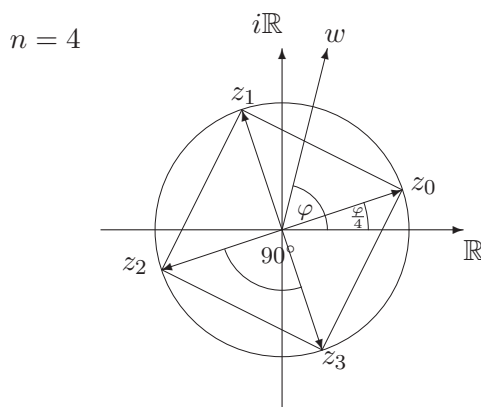
$$z_k^n = \underbrace{(\sqrt[n]{r})^n}_{|z_k|^n} \left(\underbrace{\cos(\varphi + k \cdot 360^\circ)}_{n \cdot \arg(z_k)} + i \sin(\varphi + k \cdot 360^\circ) \right) = |w|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = w.$$

Wir haben also n verschiedene Lösungen der Gleichung $z^n = w$ gefunden. Wir zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Sei z eine beliebige Lösung von $z^n = w$ und $z = |z|(\cos \psi + i \cdot \sin \psi)$ die trigonometrische Darstellung von z . Es gilt $|z|^n = |w|$ und folglich $|z| = \sqrt[n]{|w|}$. Weiterhin ist $n \cdot \psi = \varphi + 360^\circ \ell$, für ein $\ell \in \mathbb{Z}$ und somit $\psi = \frac{\varphi}{n} + \ell \frac{360^\circ}{n}$. Wir teilen ℓ durch n mit Rest: $\ell = k + rn$, $r \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq k \leq n-1$. Dann gilt $\psi = \varphi_k + r \cdot 360^\circ$ und folglich $z = z_k$. \square

Die n verschiedenen Lösungen von $z^n = w$ mit $w \neq 0$, heißen *die n . Wurzeln von w .*

Geometrische Deutung der Wurzeln:

Die Lösungen z_k von $z^n = w$ bilden die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks auf dem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{|w|}$.



Die n verschiedenen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ heißen *n -Einheitswurzeln*. Sie sind gegeben durch

$$z_k = \cos \left(k \frac{360^\circ}{n} \right) + i \sin \left(k \frac{360^\circ}{n} \right),$$

wobei $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Wir formulieren abschließend den Fundamentalsatz der Algebra, der eine der wichtigsten Aussagen über komplexe Zahlen enthält.

Satz 2.16 (Fundamentalsatz der Algebra)

Es seien a_0, a_1, \dots, a_{n-1} komplexe Zahlen. Dann besitzt die Gleichung

$$P(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

eine Lösung $\lambda \in \mathbb{C}$. Dabei gilt

$$P(z) = (z - \lambda)(z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_1z + b_0),$$

wobei b_0, \dots, b_{n-2} komplexe Zahlen sind. Ein komplexes Polynom $P(z)$ von Grad n hat also genau n Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und es gilt

$$P(z) = (z - \lambda_1) \cdot (z - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n),$$

wobei die Nullstellen nicht alle verschieden sein müssen.

Den Beweis dieses Satzes für allgemeine n werden wir später in Kapitel 4 führen. Wir beweisen den Fundamentalsatz der Algebra hier zunächst nur für $n = 2$. In diesem Fall erhält man alle komplexen Lösungen z der quadratischen Gleichung $z^2 + a_1z + a_0 = 0$ mittels quadratischer Ergänzung. Es gilt:

$$\begin{aligned} z^2 + a_1z + a_0 &= 0 \\ \iff \left(z + \frac{a_1}{2}\right)^2 + a_0 - \frac{a_1^2}{4} &= 0 \\ \iff v^2 = w \quad \text{wobei } v := z + \frac{a_1}{2} \quad \text{und } w = \frac{a_1^2}{4} - a_0. \end{aligned}$$

1. Fall: $w \neq 0$. In diesem Fall können wir die Gleichung $v^2 = w$ nach Satz 2.15 lösen. Wir erhalten genau 2 verschiedene komplexe Lösungen $\pm v_0$ von $v^2 = w$. Daraus ergeben sich zwei komplexe Lösungen⁷ λ_1 und λ_2 von $z^2 + a_1z + a_0 = 0$ mit

$$\lambda_1 := -\frac{a_1}{2} + v_0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 := -\frac{a_1}{2} - v_0, \quad \text{wobei } v_0^2 = \frac{a_1^2}{4} - a_0.$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) &= \left(z - v_0 + \frac{a_1}{2}\right) \left(z + v_0 + \frac{a_1}{2}\right) = \left(z + \frac{a_1}{2}\right)^2 - v_0^2 \\ &= \left(z + \frac{a_1}{2}\right)^2 - w = \left(z + \frac{a_1}{2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = z^2 + a_1z + a_0 = 0. \end{aligned}$$

2. Fall: $w = 0$. In diesem Fall gilt $a_0 = \frac{a_1^2}{4}$ und deshalb

$$z^2 + a_1z + a_0 = \left(z + \frac{a_1}{2}\right) \left(z + \frac{a_1}{2}\right).$$

Folglich ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$ eine 2-fache komplexe Lösung von $z^2 + a_1z + a_0 = 0$. □

⁷ Vergleichen Sie diese Lösungen mit der Lösungsformel im reellen Fall!!

Folgen und Reihen

In diesem Kapitel beginnen wir mit der Behandlung von Grenzprozessen, die zu den wichtigsten Prinzipien der Analysis gehören. Viele Größen (spezielle Zahlen, Funktionswerte, Flächeninhalte, Volumen, ...) werden nicht durch eine geschlossene Formel angegeben, sondern als Grenzwert einer bestimmten Folge definiert und dann in der Regel durch Approximationsverfahren näherungsweise berechnet. Um dies zu tun, benötigt man den Begriff der Folge und ihres Grenzwertes.

Definition 3.1. Sei X eine nichtleere Menge. Unter einer Folge in X versteht man eine Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ n &\longmapsto x_n, \end{aligned}$$

die jeder natürlichen Zahl n einen Punkt $x_n \in X$ zuordnet.

Eine Folge ist also eine durch die Abbildung f gegebene Aufzählung von Punkten in X , wobei Punkte auch mehrfach vorkommen können. Wir geben künftig lediglich die Bildwerte der Abbildung f an und benutzen für die Folge die nachstehenden Schreibweisen:

$$\boxed{x_1, x_2, x_3, \dots \quad \text{oder} \quad (x_n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{oder} \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{oder kurz} \quad (x_n).}$$

Um den Grenzwert einer Folge zu definieren, benötigt man ein Konzept, mit dem man den Abstand zwischen Punkten von X messen kann (wann sind sie weit von einander entfernt, wann liegen sie dicht beieinander?). Eines dieser Konzepte ist die Festlegung einer Abstandsfunktion d auf X , die den Abstand zwischen zwei Punkten mißt. Dies führt auf den Begriff des metrischen Raumes (X, d) , den wir im 2. Semester der Analysis-Vorlesung behandeln werden. In diesem Kapitel der Vorlesung werden wir zunächst den Spezialfall von Folgen reeller Zahlen und Folgen komplexer Zahlen behandeln ($X = \mathbb{R}$ bzw. $X = \mathbb{C}$). In diesem Fall haben wir durch den Betrag eine Abstandsfunktion gegeben:

Der Betrag $|x - y|$ beschreibt den Abstand der Zahlen x und y voneinander.

3.1 Folgen in \mathbb{R} und in \mathbb{C}

3.1.1 Konvergente Zahlenfolgen und ihre Eigenschaften

Definition 3.2. Sei (x_n) eine Folge reeller (bzw. komplexer) Zahlen. Wir sagen, dass (x_n) gegen die Zahl $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $x \in \mathbb{C}$) konvergiert, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein (von ε abhängender) Index $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|x - x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Der Punkt x heißt Grenzwert (GW) der Folge (x_n) . Besitzt eine Folge (x_n) einen Grenzwert, so heißt sie konvergent. Besitzt die Folge (x_n) keinen Grenzwert, so heißt sie divergent.

Für eine gegen x konvergente Zahlenfolge (x_n) schreiben wir:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{oder} \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x \quad \text{oder kurz} \quad x_n \longrightarrow x.}$$

Im Fall einer *komplexen* Zahlenfolge (x_n) bedeutet die Konvergenz $x_n \longrightarrow x$, dass ab dem Index $n_0(\varepsilon)$ alle Folgenglieder x_n in der offenen Kreisscheibe $K_\varepsilon(x)$ um x mit dem Radius ε liegen:

$$x_n \in K_\varepsilon(x) := \{z \in \mathbb{C} \mid |x - z| < \varepsilon\} \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon).$$

Im Fall einer *reellen* Zahlenfolge (x_n) bedeutet die Konvergenz $x_n \longrightarrow x$, dass ab dem Index $n_0(\varepsilon)$ alle Folgenglieder x_n im offenen ε -Intervall $I_\varepsilon(x)$ um x liegen:

$$x_n \in I_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon).$$

Satz 3.1 (Eindeutigkeit des Grenzwertes) *Der Grenzwert einer konvergenten Folge in \mathbb{R} und in \mathbb{C} ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in \mathbb{R} (bzw. in \mathbb{C}), die gegen die reellen (bzw. komplexen) Zahlen x und x^* konvergiert. Angenommen $x \neq x^*$. Dann ist $\varepsilon := |x - x^*| > 0$. Also existieren n_0 und n_0^* mit

$$|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{und} \quad |x^* - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0^*.$$

Somit gilt $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|x^* - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq \max(n_0, n_0^*)$. Mit der Dreiecksungleichung für die Beträge (Satz 2.1 und Satz 2.14) folgt für ein solches n

$$\varepsilon = |x - x^*| \leq |x - x_n| + |x_n - x^*| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dies ist aber ein Widerspruch. □

Satz 3.2 *Ist (x_n) eine konvergente Folge reeller oder komplexer Zahlen, so ist die Menge $\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt.*

Beweis. Sei (x_n) eine konvergente Folge in \mathbb{R} (bzw. in \mathbb{C}) und $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Nach Definition der Konvergenz existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|x_n| = |(x_n - x) + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x| \quad \forall n \geq n_0.$$

Dann ist $M := \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x|)$ eine obere Schranke und $m = 0$ eine untere Schranke von $\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$. \square

Ist (x_n) eine reelle Folge, dann liegen alle Folgenglieder im Intervall $(-M, M) \subset \mathbb{R}$. Ist (x_n) eine komplexe Folge, dann liegen alle Folgenglieder in der Kugel $K_M(0) \subset \mathbb{C}$.

Der nächste Satz zeigt, dass der Grenzwertbegriff mit der algebraischen Struktur von \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} verträglich ist.

Satz 3.3 Seien (z_n) und (w_n) konvergente Folgen reeller oder komplexer Zahlen mit den Grenzwerten $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$. Dann konvergieren auch die Folgen $(z_n + w_n)$, $(z_n \cdot w_n)$, $(\frac{z_n}{w_n})$ falls $w \neq 0$, und $(|z_n|)$ und es gilt:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = z + w$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = z \cdot w$.

c) Ist $w \neq 0$, so ist auch $w_n \neq 0$ für alle n größer als ein $n_0 \in \mathbb{N}$, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n} = \frac{z}{w}.$$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |\lim_{n \rightarrow \infty} z_n| = |z|$.

Beweis. Zu a) Nach Dreiecksungleichung gilt

$$|(z_n + w_n) - (z + w)| = |(z_n - z) + (w_n - w)| \leq |z_n - z| + |w_n - w|.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da (z_n) gegen z und (w_n) gegen w konvergiert, existieren Indizes $n_0, n_0^* \in \mathbb{N}$, so dass

$$|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{und} \quad |w_n - w| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0^*.$$

Daraus folgt

$$|(z_n + w_n) - (z + w)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq \max(n_0, n_0^*)$$

und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = (z + w)$.

Zu b) Nach Dreiecksungleichung gilt

$$|z_n w_n - z w| = |z_n(w_n - w) + w(z_n - z)| \leq |z_n| |w_n - w| + |w| |z_n - z|.$$

Da (z_n) konvergiert, existiert nach Satz 3.2 eine positive reelle Zahl M , so dass $|z_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen M außerdem so groß, dass $M \geq |w|$. Dann folgt

$$|z_n w_n - zw| \leq M \cdot |w_n - w| + M \cdot |z_n - z| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da (z_n) gegen z und (w_n) gegen w konvergiert, existieren Indizes $n_0, n_0^* \in \mathbb{N}$, so dass

$$|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{und} \quad |w_n - w| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \forall n \geq n_0^*.$$

Folglich gilt

$$|z_n w_n - zw| < \varepsilon \quad \forall n \geq \max(n_0, n_0^*),$$

d.h. die Folge $(z_n w_n)$ konvergiert gegen zw .

Zu c) Da $w \neq 0$ und (w_n) gegen w konvergiert, existiert eine positive reelle Zahl η so dass $0 < \eta < |w_n|$ für alle n größer als ein n_0 . Man erhält

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w} \right| &= \left| \frac{z_n \cdot w - w_n \cdot z}{w_n \cdot w} \right| \\ &= \frac{|(z_n - z)w - (w_n - w)z|}{|w_n| \cdot |w|} \\ &\leq \frac{|z_n - z||w| + |w_n - w||z|}{|w_n| \cdot |w|} \\ &\leq |z_n - z| \cdot \frac{|w|}{\eta|w|} + |w_n - w| \cdot \frac{|z|}{\eta|w|}. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da (z_n) gegen z und (w_n) gegen w konvergiert, existiert ein Index $n_0^* \geq n_0$, so dass $|z - z_n| \cdot \frac{1}{\eta} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|w - w_n| \cdot \frac{|z|}{\eta|w|} < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0^*$. Daraus folgt

$$\left| \frac{z_n}{w_n} - \frac{z}{w} \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0^*.$$

Also konvergiert die Folge $(\frac{z_n}{w_n})$ gegen $\frac{z}{w}$.

Zu d) Sei $z_n \rightarrow z$ und $\varepsilon > 0$. Aus den Betragseigenschaften folgt

$$||z_n| - |z|| \leq |z_n - z| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon).$$

Also konvergiert $(|z_n|)$ gegen $|z|$. □

Der nächste Satz führt die Konvergenz von komplexen Folgen auf die Konvergenz von reellen Folgen zurück.

Satz 3.4 *Es sei (z_n) eine Folge komplexer Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- a) (z_n) konvergiert gegen z .
- b) Die Folge der Realteile $(\operatorname{Re}(z_n))$ konvergiert gegen $\operatorname{Re}(z)$ und die Folge der Imaginärteile $(\operatorname{Im}(z_n))$ konvergiert gegen $\operatorname{Im}(z)$.
- c) Die Folge der konjugiert komplexen Zahlen (\bar{z}_n) konvergiert gegen \bar{z} .

Beweis. a) \iff b): Sei $z_n = a_n + ib_n$ und $z = a + ib$. Dann gilt

$$|z - z_n| = \sqrt{(a - a_n)^2 + (b - b_n)^2}. \quad (3.1)$$

Sei $\varepsilon > 0$.

a) \implies b): Konvergiert (z_n) gegen z , so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|z - z_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt wegen (3.1)

$$|a - a_n| \leq |z - z_n| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |b - b_n| \leq |z - z_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Folglich konvergiert (a_n) gegen a und (b_n) gegen b .

b) \implies a): Konvergiert (a_n) gegen a und (b_n) gegen b , so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \forall n \geq n_0.$$

Dann folgt mit (3.1)

$$|z - z_n| < \varepsilon,$$

d.h. (z_n) konvergiert gegen z .

a) \iff c): Dies folgt aus $|z - z_n| = |\bar{z} - \bar{z}_n|$. □

In den *reellen* Zahlen haben wir außer den algebraischen Rechenregeln (Körpereigenschaften) auch die Anordnungseigenschaft ($x \leq y$). Auch diese Eigenschaft ist mit der Grenzwertbildung verträglich.

Satz 3.5 Seien (x_n) und (y_n) zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit den Grenzwerten $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$.

a) Gilt $x_n \leq y_n$ für alle $n \geq n^*$, so folgt $x \leq y$.

b) Sei (u_n) eine weitere Folge reeller Zahlen mit $x_n \leq u_n \leq y_n$ für alle $n \geq n^*$ und sei $x = y$. Dann ist die Folge (u_n) ebenfalls konvergent und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$.

[Sandwich-Lemma].

Beweis. Zu a) Angenommen, es wäre $x > y$. Wir setzen $\varepsilon = x - y > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Deshalb ist $x_n > x - \frac{\varepsilon}{2} = y + \frac{\varepsilon}{2} > y_n$ für alle $n \geq n_0$. Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung und somit war die Annahme $x > y$ falsch.

Zu b) Sei $x_n \leq u_n \leq y_n$ für alle $n \geq n^*$. Da $x_n \rightarrow x$ und $y_n \rightarrow x$, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 so dass $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{4}$ und $|y_n - x| < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $n \geq n_0$. Aus der Dreiecks-Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} |x - u_n| &\leq |x - x_n| + |x_n - u_n| \\ &\leq |x - x_n| + |x_n - y_n| \\ &\leq |x - x_n| + |x_n - x| + |x - y_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon \quad \forall n \geq \max\{n^*, n_0\}. \end{aligned}$$

Folglich konvergiert die Folge (u_n) gegen x . □

Definition 3.3. Eine Folge (z_n) von reellen oder komplexen Zahlen, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.

Aus den Sätzen 3.3 und Satz 3.5 folgt dann sofort:

- Eine Folge reeller oder komplexer Zahlen (z_n) ist genau dann eine Nullfolge, wenn die Folge der Beträge $(|z_n|)$ eine Nullfolge ist.
- Sind (z_n) und (w_n) Nullfolgen, so ist auch $(z_n + w_n)$ eine Nullfolge.
- Ist (z_n) eine Nullfolge und (w_n) eine konvergente Folge in \mathbb{R} oder in \mathbb{C} , so ist die Folge $(z_n w_n)$ ebenfalls eine Nullfolge.
- Ist (y_n) eine Nullfolge reeller Zahlen und (x_n) eine weitere Folge reeller Zahlen mit $0 \leq x_n \leq y_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist (x_n) ebenfalls eine Nullfolge.

Wichtige Beispiele konvergenter Folgen in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} :

1. Sei q eine positive rationale Zahl. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^q = 0$.

Nach dem Archimedischen Axiom existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon^{\frac{1}{q}}$. Folglich ist $\left|\left(\frac{1}{n}\right)^q\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, woraus die Behauptung folgt.

2. Sei x eine positive reelle Zahl. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Um dies einzusehen, betrachten wir zunächst $x > 1$. Sei $x_n := \sqrt[n]{x} - 1$. Dann gilt $x_n > 0$ und aus der Bernoullischen Ungleichung erhalten wir

$$x = (1 + x_n)^n \geq 1 + n \cdot x_n.$$

Also gilt $0 < x_n \leq \frac{x-1}{n}$. Da $\left(\frac{x-1}{n}\right)$ eine Nullfolge ist, konvergiert (x_n) ebenfalls gegen Null, und somit $(\sqrt[n]{x})$ gegen 1.

Ist $0 < x < 1$, so folgt $\frac{1}{x} > 1$ und wir erhalten mittels Satz 3.3 und dem gerade Bewiesenen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{x}}} = 1.$$

3. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Zum Beweis betrachten wir die Folge $x_n := \sqrt[n]{n} - 1$ für $n \geq 2$. Es gilt $x_n > 0$. Aus der binomischen Formel folgt

$$n = (1 + x_n)^n > \binom{n}{2} x_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1) x_n^2.$$

Folglich gilt $0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Nach 1. ist $(\sqrt{\frac{2}{n-1}})$ eine Nullfolge, somit ist (x_n) ebenfalls eine Nullfolge und folglich gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$.

Dies sieht man folgendermaßen: Da $0 \leq |z| < 1$, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$|z|^{n_0} < \varepsilon$. Da $|z| < 1$ ist, erhält man $|z|^n < |z|^{n_0}$ für alle $n \geq n_0$, das heißt $|z|^n = |z^n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Folglich gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$.

5. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ und $k \in \mathbb{N}$ eine fixierte natürliche Zahl. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$.

Dies bedeutet, dass für $|z| > 1$ die Folge der Potenzen $|z|^n$ schneller wächst als jede noch so große Potenz von n . Zum Beweis setzen wir $x := |z| - 1$ und wählen eine natürliche Zahl $p > k$. Für jedes $n > 2p$ folgt aus der binomischen Formel

$$(1+x)^n > \binom{n}{p} \cdot x^p = \frac{\overbrace{n(n-1) \cdots (n-(p-1))}^{p\text{-Faktoren}}}{p!} \cdot x^p.$$

Da $p < \frac{n}{2}$, ist jeder der Faktoren $n, (n-1), \dots, (n-(p-1))$ größer als $\frac{n}{2}$. Es folgt $(1+x)^n > (\frac{n}{2})^p \cdot \frac{x^p}{p!}$ und somit

$$0 < \frac{n^k}{|z|^n} < \frac{2^p \cdot p!}{x^p \cdot n^{p-k}} \leq \underbrace{\frac{2^p \cdot p!}{x^p}}_{\text{konstant}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Auf der rechten Seite steht eine Nullfolge, also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$.

Definition 3.4. Sei (x_n) eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Unter einer Teilfolge von (x_n) verstehen wir eine unendliche Auswahl von Elementen dieser Folge, d.h. eine Folge $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, wobei $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ eine Teilmenge von \mathbb{N} mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ist.

Offensichtlich gilt:

Satz 3.6 Ist (x_n) eine gegen x konvergente Folge reeller oder komplexer Zahlen. Dann konvergiert jede Teilfolge von (x_n) ebenfalls gegen x .

Definition 3.5. Sei (x_n) eine Folge reeller (bzw. komplexer) Zahlen. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $x \in \mathbb{C}$) heißt Häufungspunkt der Folge (x_n) , wenn es eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ von (x_n) gibt mit $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = x$.

Die Menge der Häufungspunkte von (x_n) bezeichnen wir mit $HP(x_n)$.

Beispiele:

1. Sei (x_n) eine gegen x konvergente Folge reeller oder komplexer Zahlen. Dann gilt nach Satz 3.6, dass $HP(x_n) = \{x\}$.
2. Wir betrachten die reelle Folge (x_n) mit

$$x_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann gilt $HP(x_n) = \{0, 1\}$.

3. Es sei (z_n) die komplexe Folge mit $z_n := \cos(n \cdot 45^\circ) + i \sin(n \cdot 45^\circ)$. Dann gilt $z_n^8 = 1$. Für $n = 1, 2, \dots, 8$ erhalten wir die acht verschiedenen 8. Einheitswurzeln. Außerdem gilt $z_{n+8} = z_n$. Folglich gilt: $HP(z_n) = \{z_1, z_2, \dots, z_8\}$.

3.1.2 Spezielle Eigenschaften reeller Folgen

In diesem Abschnitt betrachten wir weitere, spezielle Eigenschaften von Folgen *reeller* Zahlen. Wir nutzen dabei aus, dass \mathbb{R} ein vollständiger angeordneter Körper ist.

Um später Formulierungen vereinheitlichen zu können, betrachten wir zunächst eine spezielle Sorte von *divergenten* Folgen reeller Zahlen und ordnen diesen den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ zu.

Definition 3.6. Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen.

Wir sagen, dass (x_n) gegen $+\infty$ strebt, falls zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \geq M$ für alle $n \geq n_0$.

Wir sagen, dass (x_n) gegen $-\infty$ strebt, falls zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \leq M$ für alle $n \geq n_0$.

Für Folgen reeller Zahlen, die gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ streben, benutzen wir die Schreibweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Man nennt diese Sorte divergenter Folgen reeller Zahlen oft auch *bestimmt divergent* oder *uneigentlich konvergent* (je nach Autor des benutzten Buches) und $\pm\infty$ den uneigentlichen Grenzwert.

Beispiele:

- Ist $x_n = n$ oder $x_n = n^2$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
- Die Folge $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \dots$ ist in \mathbb{R} divergent, strebt aber *nicht* gegen $+\infty$, obwohl sie beliebig große Glieder enthält.
- Aus $x_n \rightarrow +\infty$ und $y_n \rightarrow +\infty$ folgt $x_n + y_n \rightarrow +\infty$ und $x_n \cdot y_n \rightarrow +\infty$.
- Aus $x_n \rightarrow +\infty$ und $y_n \rightarrow a$ für $a > 0$ folgt $x_n + y_n \rightarrow +\infty$ und $x_n \cdot y_n \rightarrow +\infty$.
- Wenn $x_n \rightarrow +\infty$, so $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$.
- Wenn $x_n \rightarrow 0$ und $x_n > 0$, so $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$.

Aus $x_n \rightarrow +\infty$ und $y_n \rightarrow 0$ kann man i.a. nichts über das Verhalten von $x_n \cdot y_n$ folgern, wie die folgenden Beispiele zeigen.

- Sei $x_n = n^2$ und $y_n = \frac{1}{n}$, so gilt $x_n \cdot y_n = n \rightarrow +\infty$.
- Sei $x_n = n^2$ und $y_n = \frac{1}{n^2}$, so gilt $x_n \cdot y_n = 1 \rightarrow 1$.
- Sei $x_n = n^2$ und $y_n = \frac{1}{n^3}$, so gilt $x_n \cdot y_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

- Für $x_n = n$ und $y_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$ gilt $x_n \cdot y_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$.

Folglich konvergiert $x_n \cdot y_n$ überhaupt nicht.

Definition 3.7. Eine Folge reeller Zahlen (x_n) heißt *beschränkt* (von oben beschränkt bzw. von unten beschränkt), wenn die Menge der Folgenglieder $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt (von oben beschränkt bzw. von unten beschränkt) ist.

Für eine beschränkte Folge (x_n) gibt es eine Zahl $M \in \mathbb{R}^+$ mit $|x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Satz 3.2 wissen wir, dass jede *konvergente* Folge reeller Zahlen (x_n) beschränkt ist. Die Umkehrung gilt nicht. Aus dem Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen erhalten wir aber die folgende Eigenschaft beschränkter Folgen¹.

Satz 3.7 (Satz von Bolzano/Weierstraß, 1. Teil)

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge, d.h. einen Häufungspunkt.

Beweis. Sei (x_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann existiert ein $M > 0$ mit $-M < x_n < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die folgende Menge $A \subset \mathbb{R}$:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq x_n \text{ für unendlich viele } n\}.$$

1. A ist nicht leer, da $-M \in A$.
2. A ist nach oben beschränkt, da zum Beispiel M eine obere Schranke ist.

Nach dem Satz 2.2 existiert ein Supremum $g = \sup A$ der Menge A . Wir zeigen nun, dass g ein Häufungspunkt von (x_n) ist. Zunächst zeigen wir, dass für jedes $\varepsilon > 0$ im Intervall $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ unendlich viele Folgenglieder liegen. Sei also $\varepsilon > 0$. Aus der Definition des Supremums erhalten wir

- a) $g + \varepsilon \notin A$. D.h. für höchstens endlich viele x_n gilt die Ungleichung $g + \varepsilon \leq x_n$.
- b) Es existiert ein $x \in A$ mit $g - \varepsilon < x$. Somit sind unendlich viele Folgenglieder x_n größer oder gleich x , also größer als $g - \varepsilon$.

Insgesamt folgt also, dass unendlich viele Glieder der Folge (x_n) im Intervall $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ liegen. Wir konstruieren jetzt eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) auf folgende Weise.

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 &\implies \exists x_{n_1} : g - 1 < x_{n_1} < g + 1 \\ \varepsilon = \frac{1}{2} &\implies \exists x_{n_2} : g - \frac{1}{2} < x_{n_2} < g + \frac{1}{2}, \quad n_2 > n_1, \\ &\vdots \\ \varepsilon = \frac{1}{k} &\implies \exists x_{n_k} : g - \frac{1}{k} < x_{n_k} < g + \frac{1}{k}, \quad n_k > n_{k-1} \dots \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) gefunden mit $|x_{n_k} - g| < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit ist $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = g$ und g ein Häufungspunkt von (x_n) . \square

Definition 3.8. *Eine Folge reeller Zahlen (x_n) heißt*

- *monoton wachsend, falls $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$*
- *monoton fallend, falls $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$*
- *monoton, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.*

¹ Karl Weierstraß (1815-1897), Bernhard Bolzano (1781-1848).

Satz 3.8 (Satz von Bolzano/Weierstraß, 2. Teil)

Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen (x_n) konvergiert, und zwar gegen $\sup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge reeller Zahlen (x_n) konvergiert, und zwar gegen $\inf \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis. Sei (x_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt. Nach Satz 2.2 existiert das Supremum $g = \sup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wir zeigen, dass (x_n) gegen g konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Supremums existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{m_0} > g - \varepsilon$, also mit $x_{m_0} \in (g - \varepsilon, g]$. Da (x_n) monoton wachsend ist, gilt $g - \varepsilon < x_{m_0} \leq x_n \leq g$ für alle $n \geq m_0$. Folglich konvergiert (x_n) gegen g .

Den Beweis für monoton fallende, nach unten beschränkte Folgen führt man analog. \square

Sei nun (x_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann ist die Menge der Häufungspunkte $HP(x_n)$ nicht leer (Satz 3.7) und ebenfalls beschränkt (Übungsaufgabe). Folglich existiert das Supremum und das Infimum² von $HP(x_n)$.

Definition 3.9. Sei (x_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen.

Das Supremum der Menge der Häufungspunkte von (x_n) nennt man auch *limes superior* von (x_n) und bezeichnet es mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup HP(x_n).$$

Das Infimum der Menge der Häufungspunkte von (x_n) nennt man auch *limes inferior* von (x_n) und bezeichnet es mit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf HP(x_n).$$

Ist (x_n) nicht nach oben beschränkt, so setzen wir $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := +\infty$.

Ist (x_n) nicht nach unten beschränkt, so setzen wir $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := -\infty$.

Satz 3.9 Sei (x_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = g.$$

Beweis. (\implies) Sei (x_n) gegen $g \in \mathbb{R}$ konvergent. Dann gilt $HP(x_n) = \{g\}$ und somit $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = g$.

(\impliedby) Sei umgekehrt $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = g$. Dann gilt $HP(x_n) = \{g\}$, das heißt jede konvergente Teilfolge von (x_n) konvergiert gegen g . Angenommen (x_n) würde nicht gegen g konvergieren. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass gilt

² Man kann auch zeigen, dass das Supremum und das Infimum in der Menge der Häufungspunkte liegen, d.h., dass es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt gibt.

$$\forall n_0 \exists n \geq n_0 \text{ mit } |x_n - g| \geq \varepsilon.$$

Wir konstruieren jetzt eine Teilfolge von (x_n) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} n_0 = 1 &\implies \exists n_1 \geq 1 : |x_{n_1} - g| \geq \varepsilon, \\ n_0 = n_1 + 1 &\implies \exists n_2 > n_1 : |x_{n_2} - g| \geq \varepsilon, \dots, \\ n_0 = n_{k-1} + 1 &\implies \exists n_k > n_{k-1} : |x_{n_k} - g| \geq \varepsilon, \dots \end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit $|x_{n_k} - g| \geq \varepsilon$, die ebenfalls beschränkt ist. Nach Satz von Bolzano–Weierstraß enthält sie eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{k_i}})$, deren Grenzwert g^* nach Konstruktion von g verschieden ist. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung. \square

Anwendung: Die Eulerzahl e

Satz 3.10 Die Folge der reellen Zahlen (a_n) mit

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist in \mathbb{R} konvergent.

Der Grenzwert der Folge (a_n) heißt Eulerzahl e .

Beweis. Wir zeigen, dass (a_n) eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist.

Nach Satz 3.8 existiert dann ein Grenzwert für (a_n) .

1. *Beschränktheit von (a_n) :* Aus der binomischen Formel folgt

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k.$$

Wir schätzen den Term $\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k$ für $1 \leq k \leq n$ ab:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{\overbrace{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}^{k\text{-Faktoren}}}{k! \cdot \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k\text{-mal}}} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{(k-1)}{n}\right)}_{\leq 1} \quad (*) \\ &\leq \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Folglich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\
&= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \\
&\leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \quad (\text{geometrische Summe}) \\
&< 3.
\end{aligned}$$

2. *Monotonie von (a_n)* : Gleichung (*) zeigt, dass

$$\binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k < \binom{n+1}{k} \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^k.$$

Somit gilt $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Satz 3.11 Die Folge der reellen Zahlen (b_n) mit

$$b_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

konvergiert in \mathbb{R} und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Beweis. Aus dem Beweis von Satz 3.10 folgt $a_n \leq b_n < 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist (b_n) eine nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge. Nach Satz 3.8 existiert deshalb ein Grenzwert von (b_n) und es gilt

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Andererseits gilt für $m \leq n$ wegen Formel (*) aus dem Beweis von Satz 3.10

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1 + 1 + \frac{(1 - \frac{1}{n})}{2!} + \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{3!} + \dots + \frac{(1 - \frac{1}{n}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{n-1}{n})}{n!} \\
&\geq 1 + 1 + \frac{(1 - \frac{1}{n})}{2!} + \dots + \frac{(1 - \frac{1}{n}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{m-1}{n})}{m!}.
\end{aligned}$$

Wir halten m fest und gehen in dieser Ungleichung mit n gegen $+\infty$. Dann folgt

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!} = b_m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Deshalb gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m \leq e$ und wir erhalten zusammenfassend $e = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. □

Um die Eulerzahl genauer berechnen zu können, beweisen wir die folgende Fehlerabschätzung.

Satz 3.12 *Es sei $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die folgende Abschätzung für die Eulerzahl e :*

$$b_n < e < b_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Beweis. Für festes n gilt $e - b_n = \lim_{k \rightarrow \infty} (b_k - b_n)$. Für $k > n$ erhalten wir

$$\begin{aligned} b_k - b_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2) \cdot \dots \cdot k} \right) \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{k-n-1}} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{n+2}\right)^{k-n}}{1 - \left(\frac{1}{n+2}\right)} \quad (\text{geometrische Summe}) \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n \cdot n!} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang in dieser Ungleichung für k gegen $+\infty$ liefert

$$e - b_n \leq \frac{1}{n \cdot n!} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < \frac{1}{n \cdot n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Mittels der Fehlerabschätzung aus Satz 3.12 kann man Näherungswerte für e angeben. Man erhält zum Beispiel für $n = 10$:

$$b_{10} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} = 2.7182815\dots \quad \frac{1}{10 \cdot 10!} = 0.00000002\dots$$

Folglich ist $2.7182815 < e < 2.7182815\dots + 0.00000002\dots$ und somit

$$e \approx 2.7182815.$$

Als weitere Anwendung der Fehlerabschätzung beweisen wir

Satz 3.13 *Die Eulerzahl e ist irrational.*

Beweis. Angenommen e wäre eine rationale Zahl. Dann können wir e in der Form $e = \frac{p}{q}$ für $p, q \in \mathbb{N}$ darstellen. Für $q \in \mathbb{N}$ gilt nach Satz 3.12

$$0 < e - b_q < \frac{1}{q \cdot q!}.$$

Daraus folgt $0 < e \cdot q! - b_q \cdot q! < \frac{1}{q}$. Da $e = \frac{p}{q}$, ist $e \cdot q!$ ganzzahlig. Wegen

$$b_q = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}$$

ist $b_q \cdot q!$ ganzzahlig. Somit ist auch $e \cdot q! - b_q \cdot q!$ ganzzahlig. Das ist aber ein Widerspruch zu $0 < e \cdot q! - b_q \cdot q! < \frac{1}{q} < 1$. □

3.1.3 Cauchy-Folgen und Konvergenz

Bei den bisherigen Konvergenzuntersuchungen von Folgen haben wir immer benutzt, dass wir den möglichen Grenzwert der Folge bereits kennen und dann das Konvergenzkriterium aus der Definition nachgeprüft. Wir fragen uns nun, ob man die Konvergenz einer Folge beschreiben kann *ohne* den möglichen Grenzwert zu kennen. Dazu definieren wir:

Definition 3.10. Eine Folge reeller oder komplexer Zahlen (z_n) heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein (von ε abhängiges) $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|z_n - z_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt.

Satz 3.14 (Konvergenzkriterium von Cauchy)

Eine Folge reeller oder komplexer Zahlen (z_n) ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis. 1. Wir zeigen, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.

Sei (z_n) eine gegen z konvergente Folge reeller oder komplexer Zahlen und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für $n, m \geq n_0$ folgt aus der Dreiecksungleichung

$$|z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z - z_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Somit ist (z_n) eine Cauchy-Folge.

2. Wir zeigen nun, dass jede Cauchy-Folge reeller oder komplexer Zahlen konvergiert.

1. *Fall:* Sei (z_n) eine Cauchy-Folge *reeller* Zahlen. Wir zeigen zunächst, dass (z_n) beschränkt ist. Nach Definition existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $|z_n - z_m| < 1$ für alle $m, n \geq n_0$.

Dann gilt

$$|z_n| \leq |z_n - z_{n_0}| + |z_{n_0}| < 1 + |z_{n_0}| \quad \forall n \geq n_0.$$

Dies zeigt

$$|z_n| \leq M := \max(1 + |z_{n_0}|, |z_1|, \dots, |z_{n_0-1}|) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

d.h. (z_n) ist beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die beschränkte reelle Folge (z_n) eine konvergente Teilfolge (z_{n_j}) . Deren Grenzwert sei $z \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass auch die gesamte Folge (z_n) gegen z konvergiert: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n^* \in \mathbb{N}$, so dass $|z_n - z_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq n^*$ sowie ein $n_k > n^*$ mit $|z_{n_k} - z| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle $n \geq n^*$ folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|z_n - z| \leq |z_n - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Somit gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

2. *Fall:* Sei (z_n) eine Cauchy-Folge *komplexer* Zahlen und $z_n := a_n + ib_n$. Dann sind die Folge der Realteile (a_n) sowie die Folge der Imaginärteile (b_n) Cauchy-Folgen in \mathbb{R} , denn wegen

$$|a_n - a_m| \leq \sqrt{(a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2} = |z_n - z_m|,$$

$$|b_n - b_m| \leq \sqrt{(a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2} = |z_n - z_m|$$

überträgt sich die Cauchy-Folgen-Bedingung von (z_n) auf (a_n) und (b_n) . Aus dem 1. Fall wissen wir dann, dass (a_n) gegen eine reelle Zahl a und (b_n) gegen eine reelle Zahl b konvergiert. Nach Satz 3.4 konvergiert dann aber (z_n) gegen $z = a + ib$. \square

Achtung: Die Gültigkeit von Satz 3.14 basiert auf der Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen. Wir haben für den Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß die Existenz des Supremums einer nach oben beschränkten Mengen benutzt! Satz 3.14 gilt für Folgen in **anderen** Mengen X nicht mehr !! Es kann Cauchy-Folgen in X geben, die in X **nicht** konvergieren.

Beispiel 1: Sei $X := (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Auch in dieser Menge kann man den Abstand zwischen zwei Punkten x, y durch den Betrag $|x - y|$ messen. Wir betrachten die Folge (x_n) in $(0, 1)$ mit $x_n := \frac{1}{n}$. (x_n) ist eine Nullfolge in \mathbb{R} , folglich ist sie eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} und damit auch in $X = (0, 1)$. Sie hat aber in $X = (0, 1)$ keinen Grenzwert, da $0 \notin (0, 1)$.

Beispiel 2: Sei $X = \mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen, ebenfalls mit dem durch $|x - y|$ gegebenen Abstand.

a) Wir betrachten die Folge rationaler Zahlen (x_n) , definiert durch

$$x_1 := 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wir wissen, dass (x_n) in \mathbb{R} gegen $\sqrt{2}$ konvergiert (siehe Übungsaufgabe 21 a)). Die Folge (x_n) ist also eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} und somit auch in \mathbb{Q} . Aber $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl. Folglich hat die Cauchy-Folge (x_n) in \mathbb{Q} keinen Grenzwert.

b) Wir betrachten die Folge der rationalen Zahlen (y_n) , definiert durch $y_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Die Folge (y_n) konvergiert in \mathbb{R} gegen die Eulerzahl e , sie ist also eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} und somit auch in \mathbb{Q} . Da die Eulerzahl irrational ist, hat die Cauchy-Folge (y_n) in \mathbb{Q} keinen Grenzwert.

3.2 Reihen in \mathbb{R} und \mathbb{C}

Reihen sind spezielle Folgen. Sie werden z.B. oft benutzt, um Funktionen zu definieren oder Funktionen geeignet zu approximieren. Die Untersuchung der Konvergenz von Reihen ist deshalb von besonderem Interesse. In diesem Abschnitt werden wir Reihen reeller oder komplexer Zahlen behandeln und Kriterien für ihre Konvergenz kennenlernen.

3.2.1 Konvergente und divergente Reihen, Konvergenzkriterien

Da man Zahlen addieren kann, kann man jeder Folge reeller oder komplexer Zahlen (x_k) eine neue Folge zuordnen, die *Folge der Partialsummen* $(s_n)_{n=1}^\infty$:

$$s_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{also}$$

$$s_1 := x_1$$

$$s_2 := x_1 + x_2$$

$$s_3 := x_1 + x_2 + x_3$$

$$s_4 := x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

...

Definition 3.11. Die Folge $(s_n)_{n=1}^\infty$ heißt *Reihe* mit den Gliedern x_k . Man schreibt für diese Reihe symbolisch

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad \text{oder} \quad x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

Die Zahl $s_n := x_1 + \dots + x_n = \sum_{k=1}^n x_k$ nennt man die *n-te Partialsumme* der Reihe.

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ heißt *konvergent*, falls die Folge der Partialsummen (s_n) in \mathbb{R} bzw. in \mathbb{C} konvergiert. Ist (s_n) konvergent, so heißt $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ Wert der Reihe und man schreibt

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Eine Reihe, die in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} nicht konvergiert, heißt *divergent*.

Das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ hat also zwei Bedeutungen: Es bezeichnet symbolisch die Folge (s_n) der Partialsummen und im Konvergenzfall auch ihren Grenzwert.

Aus den Grenzwertsätzen für Folgen erhält man, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} x_k$ für ein beliebig gewähltes $k_0 \in \mathbb{N}$ konvergiert.

Wenn für eine Reihe *reeller* Zahlen $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$ gilt, so schreibt man symbolisch

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = +\infty \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k = -\infty.$$

Die Reihe ist in diesem Fall in \mathbb{R} divergent. Gilt $x_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so bedeutet die Schreibweise

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k < +\infty,$$

dass die Reihe in \mathbb{R} konvergiert.

Definition 3.12. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ reeller oder komplexer Zahlen heißt absolut-konvergent, wenn die Reihe der Beträge $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konvergiert.

Man kann Reihen addieren und mit Skalaren multiplizieren. Für die Grenzwerte gilt dabei:

Satz 3.15 Seien (x_k) und (y_k) Folgen in \mathbb{R} (bzw. in \mathbb{C}) und λ, μ reelle (bzw. komplexe) Zahlen. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ gegen x und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ gegen y , so konvergiert die Reihe

$$\lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k + \mu \cdot \sum_{k=1}^{\infty} y_k := \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda x_k + \mu y_k)$$

gegen $\lambda x + \mu y$.

Beweis. Seien $s_n := \sum_{k=1}^n x_k$, $\hat{s}_n := \sum_{k=1}^n y_k$ und $s_n^* := \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + \mu y_k)$. Dann gilt $s_n^* = \lambda s_n + \mu \hat{s}_n$. Die Behauptung des Satzes folgt aus Satz 3.3. \square

Aus Satz 3.8 erhalten wir das folgende Kriterium für die Konvergenz von Reihen reeller Zahlen:

Satz 3.16 Sind die Reihenglieder x_k reelle Zahlen mit $x_k \geq 0$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ genau dann, wenn die Folge der Partialsummen $(s_n = x_1 + \dots + x_n)$ beschränkt ist.

Beweis. Da die Reihenglieder x_k nicht negativ sind, ist die Folge der Partialsummen (s_n) monoton wachsend. Ist die Folge (s_n) außerdem beschränkt, so konvergiert sie nach Satz 3.8. Ist andererseits die Folge der Partialsummen (s_n) konvergent, so ist sie nach Satz 3.2 beschränkt. \square

Wir leiten jetzt einige wichtige **Konvergenzkriterien** für Reihen her.

Satz 3.17 (Cauchy-Kriterium für Reihen) Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ reeller oder komplexer Zahlen ist genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|x_n + \dots + x_m| < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq n_0. \quad (*)$$

Beweis. Die Folge der Partialsummen $s_n = x_1 + \dots + x_n$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist (Cauchy-Kriterium für Folgen, Satz 3.14). (s_n) ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m \geq n \geq n_0$ die Ungleichung $|s_m - s_{n-1}| < \varepsilon$ gilt, was äquivalent zum Cauchy-Kriterium (*) ist. \square

Daraus erhalten wir ein nützliches *notwendiges* Kriterium für die Konvergenz von Reihen:

Satz 3.18 Ist eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ reeller oder komplexer Zahlen konvergent, so ist die Folge der Reihenglieder (x_k) eine Nullfolge.

Beweis. Zum Beweis nutzen wir das Cauchy-Kriterium für $m = n$. Konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. \square

Die Umkehrung dieses Satzes gilt im allgemeinen nicht.

Beispiel 1: Die harmonische Reihe

Wir betrachten die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Behauptung: Die harmonische Reihe ist in \mathbb{R} divergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ fixiert. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2^m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1} \text{ Summanden}} \\ &\geq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m}}_{m \text{ Summanden}} \\ &\geq 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Folglich existiert zu jedem $M \in \mathbb{R}$ eine Zahl m , so dass $s_n \geq 1 + \frac{m}{2} \geq M$ für alle $n \geq 2^m$. Somit strebt die Folge der Partialsummen (s_n) gegen $+\infty$. \square

Beispiel 2: Die Riemannsche Zeta-Funktion

Sei $s \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

ist konvergent, falls $s > 1$ und divergent, falls $s \leq 1$.

Beweis: 1. Fall: $s > 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein ν mit $2^\nu - 1 \geq n$ und schätzen die Partialsumme s_n mit Hilfe der Partialsumme $s_{2^\nu - 1}$ ab:

$$\begin{aligned} s_n &\leq s_{2^\nu - 1} = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{\nu-1})^s} + \dots + \frac{1}{(2^\nu - 1)^s}\right) \\ &\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^s} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^{2s}} + \dots + 2^{\nu-1} \frac{1}{2^{(\nu-1)s}} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^{\nu-1} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^\nu}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}}. \quad (\text{geometrische Summe}) \end{aligned}$$

Die Folge der Partialsummen (s_n) ist somit beschränkt, also ist (s_n) konvergent.

2. Fall: $s \leq 1$. Dann gilt

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Da die Partialsummenfolge der harmonischen Reihe gegen $+\infty$ strebt (Beispiel 1), ist die Folge (s_n) unbeschränkt, also divergent. \square

Durch $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$, $s > 1$, wird die sogenannte *Riemannsche Zeta-Funktion* definiert. Sie spielt z.B. bei der Untersuchung der Verteilung der Primzahlen eine wichtige Rolle.

Beispiel 3: Die geometrische Reihe

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine fixierte komplexe Zahl. Wir betrachten die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots$$

Behauptung:

1. Ist $|z| < 1$, so konvergiert die geometrische Reihe und für ihren Wert gilt $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$.
2. Ist $|z| \geq 1$, so divergiert die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

Beweis. Für die Partialsumme gilt nach Satz 2.9

$$s_n = 1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Für $|z| < 1$ ist (z^{n+1}) eine Nullfolge und somit gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-z}$.

Für $|z| \geq 1$ ist $|z^k| \geq 1$ und somit ist (z^k) keine Nullfolge. Deshalb ist $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ divergent (siehe Satz 3.18). \square

Satz 3.19 *Ist eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ reeller oder komplexer Zahlen absolut-konvergent, so ist sie auch konvergent und für die Werte der Reihen gilt*

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|. \quad (3.2)$$

Beweis. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konvergent. Entsprechend dem Cauchy-Kriterium gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|x_n| + \dots + |x_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq n \geq n_0.$$

Wegen der Dreiecksungleichung für den Betrag

$$|x_n + \dots + x_m| \leq |x_n| + \dots + |x_m|$$

gilt das Cauchy-Kriterium auch für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, die folglich ebenfalls konvergiert. Für die konvergente Folge (s_n) der Partialsummen $s_n := x_1 + \dots + x_n$ gilt $|\lim_{n \rightarrow \infty} s_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n|$ (Satz 3.3 d)). Daraus folgt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (|x_1| + \dots + |x_n|) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

Dies zeigt die Abschätzung (3.2). \square

Satz 3.20 (Majorantenkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine Reihe reeller oder komplexer Zahlen und (c_k) eine Folge reeller Zahlen mit $|x_k| \leq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ in \mathbb{R} , so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut-konvergent und für die Werte der Reihen gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k. \quad (3.3)$$

Beweis. Wir nutzen wiederum das Cauchy-Kriterium. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$c_n + \dots + c_m < \varepsilon \quad \forall m \geq n \geq n_0.$$

Nach Voraussetzung ist $|x_n| + \dots + |x_m| \leq c_n + \dots + c_m$. Folglich gilt das Cauchy-Kriterium auch für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$. Somit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut-konvergent, also auch konvergent. Die Ungleichung (3.3) folgt wie im Beweis von Satz 3.19. \square

Satz 3.21 (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine Reihe reeller oder komplexer Zahlen und $\alpha := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x_k|}$.

1. Ist $\alpha < 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut-konvergent und somit auch konvergent.
2. Ist $\alpha > 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ divergent.

Beweis. 1. Sei $\alpha = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x_k|} < 1$. Dann gilt $\alpha < \frac{1+\alpha}{2} < 1$. Da $\alpha = \sup HP(\sqrt[k]{|x_k|})$, sind höchstens endlich viele dieser Folgeglieder größer als $\frac{1+\alpha}{2}$. Es existiert folglich ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$\sqrt[k]{|x_k|} < \frac{1+\alpha}{2} \quad \forall k \geq k_0.$$

Somit gilt

$$|x_k| < \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^k \quad \forall k \geq k_0.$$

Da $\frac{1+\alpha}{2} < 1$, konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^k$. Aus dem Majorantenkriterium folgt dann die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ und somit auch ihre Konvergenz.

2. Sei $\alpha = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x_k|} > 1$. Dann existiert eine Teilfolge (x_{k_j}) von (x_k) mit $\sqrt[k_j]{|x_{k_j}|} \geq 1$, also mit $|x_{k_j}| \geq 1$. Somit ist (x_k) keine Nullfolge, also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ nicht (Satz 3.18). \square

Satz 3.22 (Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ eine Reihe reeller oder komplexer Zahlen, deren Glieder x_k alle von Null verschieden sind.

1. Ist $\alpha := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} < 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut-konvergent und somit auch konvergent.
2. Ist $\beta := \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} > 1$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ divergent.

Beweis. 1. Sei $\alpha = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} < 1$. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} < \frac{1+\alpha}{2} < 1 \quad \forall k \geq k_0.$$

Folglich gilt

$$|x_{k+1}| < \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) |x_k| \quad \forall k \geq k_0$$

und somit

$$|x_{k_0+j}| < \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^j |x_{k_0}| \quad \forall j \geq 0.$$

Da $\frac{\alpha+1}{2} < 1$, konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^j$. Aus dem Majorantenkriterium folgt dann, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolut konvergiert und somit auch konvergiert.

2. Sei nun $\beta = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} > 1$. Dann sind höchstens endlich viele der Zahlen $\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|}$ kleiner als 1. Folglich existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $0 < |x_k| \leq |x_{k+1}|$ für alle $k \geq k_0$. Also ist (x_k) keine Nullfolge. Nach Satz 3.18 ist deshalb die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ divergent. \square

Beispiel 4: Ob man das Wurzel- oder das Quotientenkriterium anwendet, muß man anhand der Gestalt der Reihenglieder entscheiden. Das Wurzelkriterium ist leistungsfähiger als das Quotientenkriterium. Betrachten wir z.B. die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, wobei $x_k := 2^{-k}$ für gerade k und $x_k := 8^{-k}$ für ungerades k sei. Das Wurzelkriterium zeigt Konvergenz an, da

$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_k} = \frac{1}{2}$, während das Quotientenkriterium keine Aussage liefert, da $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = 0$ und $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = +\infty$.

Beispiel 5: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

absolut-konvergent.

Beweis. Wir benutzen das Quotientenkriterium mit $x_k = \frac{z^k}{k!}$:

$$\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| = \left| \frac{z^{k+1} \cdot k!}{z^k \cdot (k+1)!} \right| = \frac{|z|}{k+1} \rightarrow 0.$$

□

Beispiel 6: Sei $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots +$$

ist absolut-konvergent, falls $|z| < 1$ und divergent, falls $|z| > 1$.

Beweis. Wir benutzen das Wurzelkriterium. Mit $x_k := \frac{z^k}{k}$ ist $\sqrt[k]{|x_k|} = \frac{|z|}{\sqrt[k]{k}}$. Da $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$, konvergiert die Folge $(\sqrt[k]{|x_k|})$ gegen $|z|$. Damit ist $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|x_k|} = |z|$ und das Wurzelkriterium liefert die Behauptung. □

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen. Für $z = 1$ ist die obige Reihe z.B. gerade die harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$, also divergent. Wir zeigen mit dem nächsten Kriterium, dass im Gegensatz dazu die Reihe für $z = -1$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \pm \dots$$

konvergiert.

Definition 3.13. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ reeller Zahlen heißt alternierend, wenn die Reihenglieder ihr Vorzeichen wechseln, d.h. wenn

$$x_{k+1} > 0 \iff x_k < 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Satz 3.23 (Leibniz–Kriterium für alternierende Reihen)

Sei $(b_k)_{k=0}^\infty$ eine monoton fallende Nullfolge positiver reeller Zahlen. Dann gilt:

1. Die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k b_k = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \dots$ konvergiert.
2. Fehlerabschätzung für den Wert s der Reihe $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k b_k$:

$$\left| s - \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k \right| \leq b_{n+1}.$$

Beweis. Zu 1) Wir betrachten die n . Partialsumme $s_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k$. Da (b_k) monoton fallend ist, gilt:

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= b_{2n+2} - b_{2n+1} \leq 0, \\ s_{2n+3} - s_{2n+1} &= -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geq 0, \\ s_{2n+1} - s_{2n} &= -b_{2n+1} < 0, \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} s_0 &\geq s_2 \geq s_4 \geq s_6 \geq \dots \\ s_1 &\leq s_3 \leq s_5 \leq s_7 \leq \dots \\ s_1 &\leq s_{2n+1} < s_{2n} \leq s_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Somit ist die Folge (s_{2n}) monoton fallend und von unten durch s_1 beschränkt; die Folge (s_{2n+1}) monoton wachsend und nach oben durch s_0 beschränkt. Nach Satz 3.8 existieren deshalb die Grenzwerte $g := \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$ und $u := \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1}$. Außerdem gilt:

$$g - u = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n+1} = 0.$$

Wir zeigen nun, dass die gesamte Folge (s_n) gegen $s := g = u$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $n_0, n_0^* \in \mathbb{N}$ so dass $|s - s_{2n}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und $|s - s_{2n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0^*$. Folglich gilt $|s - s_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq \max(2n_0, 2n_0^* + 1)$, d.h. (s_n) konvergiert gegen s .

Zu 2) Die Abschätzung (3.4) zeigt, dass

$$s_{2m+1} \leq s \leq s_{2m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

und somit

$$|s - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = b_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dies zeigt die Fehlerabschätzung. □

Beispiel 7: Die alternierende harmonische Reihe und die Leibniz-Reihe

- Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert. Wir werden in Kapitel 5 sehen, dass ihr Wert $\ln(2)$ ist.

- Die Leibniz-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

konvergiert. Wir werden in Kapitel 5 sehen, dass ihr Wert $\frac{\pi}{4}$ ist.

Das Cauchy-Produkt von Reihen

Wir haben bereits gesehen, dass man konvergente Reihen von reellen oder komplexen Zahlen addieren kann. Wir überlegen uns jetzt, wie man Reihen *multiplizieren* kann und wann das Produkt konvergiert.

Definition 3.14. Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen in \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Wir betrachten eine neue Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit den Reihengliedern

$$c_k := \sum_{j=0}^k a_j \cdot b_{k-j} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ heißt *Cauchy-Produkt* der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Wir wollen die Frage untersuchen, unter welchen Bedingungen aus der Konvergenz der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ die Konvergenz des Cauchy-Produktes $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ folgt. Im allgemeinen folgt sie nicht.

Beispiel 8: Wir betrachten die alternierenden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \pm \dots$$

Diese Reihen konvergieren nach dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen. Betrachten wir aber die Folge $c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$, so erhalten wir

$$c_k = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}} \cdot \frac{(-1)^{k-j}}{\sqrt{k-j+1}} = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^k}{\sqrt{(j+1)(k-j+1)}}.$$

Es gilt

$$(k-j+1)(j+1) = \left(\frac{1}{2}k+1\right)^2 - \left(\frac{1}{2}k-j\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}k+1\right)^2$$

und folglich

$$|c_k| \geq \frac{k+1}{\frac{1}{2}k+1} = \frac{2(k+1)}{k+2} \rightarrow 2.$$

Damit ist (c_k) keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ somit divergent.

Satz 3.24 Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen reeller oder komplexer Zahlen und sei mindestens eine der beiden Reihen absolut-konvergent. Dann konvergiert ihr Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ und für die Werte der Reihen gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

*Beweis.*³ Sei oBdA $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut-konvergent. Wir setzen $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$, $B_n := \sum_{k=0}^n b_k$, $C_n := \sum_{k=0}^n c_k$. Weiterhin bezeichne $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ und $\beta_n = B_n - B$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} C_n &= c_0 + c_1 + \dots + c_n \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) \\ &= a_0 \cdot B_n + a_1 \cdot B_{n-1} + \dots + a_n \cdot B_0 \\ &= a_0(\beta_n + B) + a_1(\beta_{n-1} + B) + \dots + a_n(\beta_0 + B) \\ &= A_n \cdot B + \underbrace{a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_0}_{=: \gamma_n}. \end{aligned}$$

Da $A_n \cdot B$ gegen $A \cdot B$ konvergiert, bleibt $\gamma_n \rightarrow 0$ zu zeigen.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da B_n gegen B konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $|\beta_n| = |B_n - B| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Damit schätzen wir $|\gamma_n|$ ab:

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &= |a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_0| \\ &\leq |a_0 \beta_n + \dots + a_{n-n_0} \beta_{n_0}| + |a_{n-n_0+1} \beta_{n_0-1} + \dots + a_n \beta_0| \\ &\leq \varepsilon(|a_0| + \dots + |a_{n-n_0}|) + |a_{n-n_0+1} \beta_{n_0-1} + \dots + a_n \beta_0| \\ &\leq \varepsilon \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right)}_{=: A^*} + |a_{n-n_0+1}| |\beta_{n_0-1}| + \dots + |a_n| |\beta_0| \\ &\leq \varepsilon A^* + |a_{n-n_0+1}| |\beta_{n_0-1}| + \dots + |a_n| |\beta_0| \quad \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

A^* ist endlich, da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nach Voraussetzung absolut-konvergiert. Da (a_n) eine Nullfolge ist, können wir die letzten n_0 -Summanden abschätzen: Es existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\gamma_n| \leq \varepsilon A^* + \varepsilon \quad \forall n \geq \max\{n_0, n_1\}.$$

Somit konvergiert die Folge (γ_n) gegen 0 und die Folge $(C_n = A_n \cdot B + \gamma_n)$ gegen $A \cdot B$. \square

Satz 3.25 Das Cauchy-Produkt zweier absolut-konvergenter Reihen ist absolut-konvergent.

Beweis. Dies überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe. \square

³ Den Beweis haben wir in der Vorlesung aus Zeitgründen nicht geführt. Ich führe ihn hier für interessierte Studierende an.

3.2.2 Komplexe Potenzreihen

In diesem Abschnitt betrachten wir spezielle Reihen komplexer Zahlen, die sogenannten Potenzreihen.

Definition 3.15. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen. Eine Potenzreihe mit dem Zentrum z_0 ist eine Reihe komplexer Zahlen der Form

$$P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Wir wollen die Frage untersuchen, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Potenzreihe $P(z)$ konvergiert. Offensichtlich konvergiert die Potenzreihe $P(z)$ für $z = z_0$ und es gilt $P(z_0) = a_0$.

Satz 3.26 Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit dem Zentrum z_0 und sei $z_1 \neq z_0$.

1. Ist $P(z_1)$ konvergent, so ist $P(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ absolut-konvergent.
2. Ist $P(z_1)$ divergent, so ist $P(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ divergent.

Beweis. Zu 1: Da die Reihe $P(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ konvergiert, ist die Folge $(a_n (z_1 - z_0)^n)$ eine Nullfolge, also insbesondere beschränkt. Sei $C \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $|a_n (z_1 - z_0)^n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$|a_n (z - z_0)^n| = |a_n (z_1 - z_0)^n| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n \leq C \cdot \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ folgt $\left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| < 1$. Die Reihe $P(z)$ hat also eine konvergente Majorante. Mit dem Majorantenkriterium und dem Grenzwert der geometrischen Reihe erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n = C \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|}.$$

Insbesondere ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ absolut-konvergent.

Zu 2: Sei $P(z_1)$ divergent und $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$. Wäre $P(z)$ konvergent, so würde aus 1. folgen, dass $P(z_1)$ absolut-konvergent wäre, was einen Widerspruch liefert. \square

Definition 3.16. Die Zahl

$$R := \sup\{|z - z_0| \mid P(z) \text{ ist konvergent}\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

heißt *Konvergenzradius* der Potenzreihe $P(z)$.

Die offene Kreisscheibe $K(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\} \subset \mathbb{C}$ heißt *Konvergenzkreis* von $P(z)$.

Die abgeschlossene Kreisscheibe um z_0 mit Radius R bezeichnen wir mit

$$\text{cl } K(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}.$$

Wir können die Aussage aus Satz 3.26 jetzt auch folgendermaßen formulieren:

Satz 3.27 Sei $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine komplexe Potenzreihe mit Zentrum $z_0 \in \mathbb{C}$ und dem Konvergenzradius R . Dann ist $P(z)$ für jeden Punkt $z \in K(z_0, R)$ absolut-konvergent und für jeden Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \text{cl } K(z_0, R)$ divergent.

Aus dem letzten Abschnitt kennen wir bereits folgende Beispiele:

- Für $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist $R = 1$.
- Für $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ist $R = 1$.
- Für $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist $R = +\infty$.

Die nächsten beiden Sätze zeigen, wie man den Konvergenzradius einer Potenzreihe bestimmen kann.

Satz 3.28 Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe und $\lambda := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt für den Konvergenzradius R von $P(z)$:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{falls } \lambda \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{falls } \lambda = +\infty \\ +\infty & \text{falls } \lambda = 0. \end{cases}$$

Beweis. Sei $\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z-z_0| = \lambda \cdot |z-z_0|$. Nach dem Wurzelkriterium konvergiert $P(z)$ für $\alpha < 1$ und divergiert für $\alpha > 1$.

(1) Sei $0 < \lambda < +\infty$. Dann folgt sofort:

$$P(z) \begin{cases} \text{konvergiert für alle } z \text{ mit } |z - z_0| < \frac{1}{\lambda} \\ \text{divergiert für alle } z \text{ mit } |z - z_0| > \frac{1}{\lambda}. \end{cases}$$

Folglich ist $R = \frac{1}{\lambda}$.

(2) Sei $\lambda = 0$, dann ist auch $\alpha = 0$. Somit konvergiert $P(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und der Konvergenzradius R ist $+\infty$.

(3) Sei $\lambda = +\infty$. Dann gilt

$$\alpha = \begin{cases} 0 & z = z_0 \\ +\infty & z \neq z_0. \end{cases}$$

Die Reihe $P(z)$ divergiert also für alle $z \neq z_0$. Somit ist $R = 0$. □

Auf analoge Weise erhält man aus dem Quotientenkriterium:

Satz 3.29 Sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit von Null verschiedenen Koeffizienten a_n und existiere der Grenzwert $\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Dann gilt für den Konvergenzradius R von $P(z)$:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\mu} & \text{falls } \mu \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{falls } \mu = +\infty \\ +\infty & \text{falls } \mu = 0. \end{cases}$$

3.2.3 Anwendung: Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion und komplexe Potenzen

In Abschnitt 2.1.5 haben wir Potenzen a^q definiert, wobei a eine positive reelle Zahl und der Exponent q eine rationale Zahl bezeichnet. In diesem Abschnitt wollen wir Potenzen a^z für komplexe Exponenten $z \in \mathbb{C}$ erklären und die Eigenschaften dieser Potenzen untersuchen. Dazu betrachten wir zunächst die folgende komplexe Potenzreihe:

$$E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Die Reihe $E(z)$ hat folgende Eigenschaften:

1. $E(z)$ ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut-konvergent.
2. Es gilt $E(0) = 1$ und $E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, wobei e die Eulerzahl bezeichnet.
3. Es gilt $E(z_1) \cdot E(z_2) = E(z_1 + z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Dies läßt sich mit der Formel für das Cauchy-Produkt aus Abschnitt 3.2.1 zeigen. Das Cauchy-Produkt der beiden absolut-konvergenten Reihen $E(z_1)$ und $E(z_2)$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \cdot \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k \cdot z_2^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} \\ &= E(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Folglich gilt nach Satz 3.24, dass $E(z_1 + z_2) = E(z_1) \cdot E(z_2)$.

Insbesondere ist $E(z) \neq 0$ und $E(z) \cdot E(-z) = E(0) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

4. Es gilt $\overline{E(z)} = E(\bar{z})$.
5. Es gilt $|E(z) - 1| \leq \frac{|z|}{1 - |z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$:

Wir benutzen dazu die Konvergenzeigenschaften der geometrischen Reihe und das Majorantenkriterium und erhalten für die Werte der Reihen:

$$|E(z) - 1| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = |z| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \right) = \frac{|z|}{1 - |z|}.$$

6. Es gilt $E(q) = e^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$:

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$E(n) = E(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}}) = \underbrace{E(1) \cdot \dots \cdot E(1)}_{n\text{-mal}} = \underbrace{e \cdot \dots \cdot e}_{n\text{-mal}} = e^n$$

Für $n \in -\mathbb{N}$ gilt $E(n) = \frac{1}{E(-n)} = \frac{1}{e^{-n}} = e^n$. Folglich ist $E(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Sei nun $q \in \mathbb{Q}$ und $q = \frac{n}{m}$, wobei $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} (e^q)^m &= e^{q \cdot m} = e^n = E(n) = E(q \cdot m) = E(\underbrace{q + \dots + q}_{m\text{-mal}}) \\ &= \underbrace{E(q) \cdot \dots \cdot E(q)}_{m\text{-mal}} = E(q)^m. \end{aligned}$$

Da e^q und $E(q)$ positive reelle Zahlen sind, folgt $e^q = E(q)$.

Die letzte Eigenschaft von $E(z)$ rechtfertigt die folgende Definition:

Definition 3.17. *Unter der komplexen Potenz e^z der Eulerzahl e verstehen wir den Wert der Potenzreihe $E(z)$, d.h.*

$$e^z := E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^z \end{aligned}$$

heißt *komplexe Exponentialfunktion*.

Aus den Eigenschaften der Potenzreihe $E(z)$ folgt

Satz 3.30 *Die komplexen Potenzen der Eulerzahl erfüllen*

1. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.
2. $|e^z - 1| \leq \frac{|z|}{1-|z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.
3. Konvergiert (z_n) gegen $z \in \mathbb{C}$, so konvergiert (e^{z_n}) gegen e^z .

Beweis. Wir müssen nur noch 3. beweisen. Sei (z_n) eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit dem Grenzwert z . Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|z_n - z| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt wegen 2. für alle $n \geq n_0$

$$0 \leq |e^{z_n} - e^z| = |e^z(e^{z_n - z} - 1)| = |e^z| \cdot |e^{z_n - z} - 1| \leq |e^z| \frac{|z_n - z|}{1 - |z_n - z|}.$$

Die rechte Seite konvergiert gegen Null. Aus dem Sandwich-Lemma folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{z_n} = e^z$. □

Wir schränken die Exponentialfunktion nun auf die reellen Zahlen ein und untersuchen die Eigenschaften der reellen Funktion $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 3.18. Eine reelle Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

monoton wachsend	$:\Leftrightarrow$	Für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt $f(x) \leq f(y)$,
streng monoton wachsend	$:\Leftrightarrow$	Für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt $f(x) < f(y)$,
monoton fallend	$:\Leftrightarrow$	Für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt $f(x) \geq f(y)$,
streng monoton fallend	$:\Leftrightarrow$	Für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt $f(x) > f(y)$.

Satz 3.31 1. Die Funktion $\exp|_{\mathbb{R}}$ nimmt nur Werte in \mathbb{R}^+ an und es gilt:

- a) $1 \leq e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$.
 b) $0 < e^x \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq 0$.

2. Die Funktion $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist streng monoton wachsend und bijektiv.

Beweis. Zu 1: Nach Definition ist $e^x = E(x) \geq 1$ für alle $x \geq 0$. Da $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$, folgt daraus $0 < e^x \leq 1$ für alle $x \leq 0$. Insbesondere nimmt $\exp|_{\mathbb{R}}$ nur Werte in \mathbb{R}^+ an.

Zu 2: Seien nun x und y zwei reelle Zahlen mit $x < y$. Dann ist

$$e^y = e^{x+(y-x)} = e^x \cdot e^{y-x} > e^x.$$

Somit ist die Funktion $\exp|_{\mathbb{R}}$ streng monoton wachsend. Insbesondere ist sie deshalb injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ surjektiv ist.

Sei $y \in \mathbb{R}^+$. Wir suchen eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit $e^s = y$. Dazu betrachten wir die folgenden Mengen

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid e^x < y\} \quad \text{und} \quad B := \{x \in \mathbb{R} \mid y \leq e^x\}.$$

Diese Mengen bilden einen Dedekindschen Schnitt $(A|B)$ von \mathbb{R} , denn

- \mathbb{R} ist die disjunkte Vereinigung von A und B .
- A und B sind nichtleer: Nach Definition gilt für $y \in \mathbb{R}^+$, dass $e^y > y$, also $y \in B$. Wir wählen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < y$. Aus $n < e^n$ folgt $e^{-n} < \frac{1}{n} < y$ und somit $-n \in A$.
- Für $a \in A$ und $b \in B$ gilt $e^a < y \leq e^b$. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion folgt $a < b$.

Sei $s \in \mathbb{R}$ die auf Grund des Vollständigkeitsaxioms der reellen Zahlen existierende Schnittzahl des Dedekindschen Schnittes $(A|B)$, d.h. es gilt $a \leq s \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Wir zeigen nun, dass $e^s = y$ gilt.

Wir betrachten dazu die Folgen $(a_n := s - \frac{1}{n})$ in A und $(b_n := s + \frac{1}{n})$ in B . Dann gilt:

$$e^s \cdot e^{-\frac{1}{n}} = e^{a_n} < y \leq e^{b_n} = e^s \cdot e^{\frac{1}{n}}.$$

Nach Satz 3.30 konvergieren die Folgen $(e^{\frac{1}{n}})$ und $(e^{-\frac{1}{n}})$ gegen $e^0 = 1$. Aus dem Sandwich-Lemma folgt somit $e^s \leq y \leq e^s$, d.h. $y = e^s$. \square

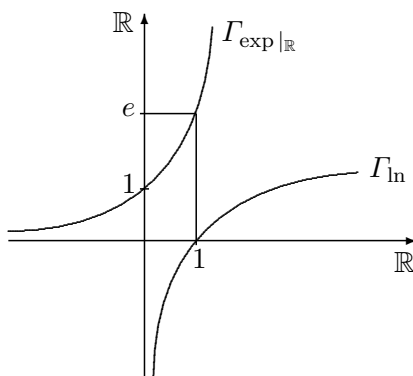
Definition 3.19. Die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ bezeichnen wir mit $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ und nennen $\ln(y)$ den natürlichen Logarithmus von y .

Die Zahl $\ln(y) \in \mathbb{R}$ ist also eindeutig bestimmt durch die Bedingung $e^{\ln(y)} = y$. Daraus ergeben sich folgende Eigenschaften für den natürlichen Logarithmus:

Satz 3.32 *Es seien $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+$ und $q \in \mathbb{Q}$.*

1. Die Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv und streng monoton wachsend.
2. $\ln(y_1 \cdot y_2) = \ln(y_1) + \ln(y_2)$.
3. $\ln(y^q) = q \cdot \ln(y)$.
4. $\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \ln(y_1) - \ln(y_2)$.
5. $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.
6. $\ln(y) > 0$ für alle $y > 1$ und $\ln(y) < 0$ für alle $0 < y < 1$.

Das folgende Bild zeigt die Graphen der Funktionen $\exp|_{\mathbb{R}}$ und \ln .



Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für die Potenz a^q , $q \in \mathbb{Q}$, die Formel

$$a^q = (e^{\ln(a)})^q = e^{\ln(a) \cdot q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q \cdot \ln(a))^n}{n!}.$$

Dies rechtfertigt die folgende Definition der komplexen Potenzen einer positiven reellen Zahl a :

Definition 3.20. *Sei $a \in \mathbb{R}^+$ und $z \in \mathbb{C}$. Unter der Potenz a^z verstehen wir die komplexe Zahl*

$$a^z := e^{\ln(a) \cdot z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z \cdot \ln(a))^n}{n!}.$$

Aus den Eigenschaften der Potenzreihe $E(z)$ ergibt sich unmittelbar:

Satz 3.33 *(Potenzgesetze für komplexe Potenzen)*

Es seien $a, b \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $1^z = 1$ und $a^0 = 1$.
2. $a^z \cdot b^z = (ab)^z$.
3. $a^z \cdot a^w = a^{z+w}$.
4. $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$.
5. $(a^x)^z = a^{x \cdot z}$.

Sei $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

bijektiv, streng monoton wachsend, falls $a > 1$, und streng monoton fallend, falls $0 < a < 1$. Die Umkehrfunktion zu \exp_a bezeichnen wir mit

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

und nennen $\log_a(y)$ den Logarithmus von y zur Basis a . Aus den Potenzgesetzen von Satz 3.33 folgen dann unmittelbar die Aussagen des folgenden Satzes.

Satz 3.34 *Die Funktion $\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv, streng monoton wachsend, falls $a > 1$, und streng monoton fallend, falls $0 < a < 1$. Für $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\rho \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$ gilt:*

1. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.
2. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
3. $\log_a(x^\rho) = \rho \cdot \log_a x$.
4. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
5. $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.

Stetige Funktionen

In diesem Kapitel beginnen wir mit der Untersuchung lokaler Eigenschaften von Funktionen. Wir beschränken uns zunächst auf Funktionen, deren Definitions- und Wertebereich in der Menge der komplexen Zahlen liegt.

Definition 4.1. Sei $D \subset \mathbb{R}$ oder $D \subset \mathbb{C}$.

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt komplex-wertige Funktion.

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt reell-wertige Funktion.

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt komplexe Funktion.

Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt reelle Funktion.

In diesem Kapitel bezeichnet D immer eine Teilmenge von \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Offensichtlich sind reelle (bzw. reell-wertige) Funktionen Spezialfälle von komplexen (bzw. komplex-wertigen) Funktionen. Alle Aussagen für komplexe (bzw. komplex-wertige) Funktionen gelten deshalb auch für reelle (bzw. reell-wertige) Funktionen.

Mit komplex-wertigen Funktionen kann man die gleichen algebraischen Operationen ausführen wie in den komplexen Zahlen, man wendet sie jeweils auf die Werte der Funktionen an.

Definition 4.2. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei komplex-wertige Funktionen. Dann sind die Summe $f + g : D \rightarrow \mathbb{C}$, das Produkt $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{C}$, der Quotient $\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{C}$, falls $g(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, der Betrag $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}$, die konjugiert-komplexe Funktion $\bar{f} : D \rightarrow \mathbb{C}$, der Realteil $\operatorname{Re}(f) : D \rightarrow \mathbb{R}$ sowie der Imaginärteil $\operatorname{Im}(f) : D \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktionen, die jedem $z \in D$ jeweils den folgenden Wert zuordnen:

$$(f + g)(z) := f(z) + g(z),$$

$$(f \cdot g)(z) := f(z) \cdot g(z),$$

$$\frac{f}{g}(z) := \frac{f(z)}{g(z)},$$

$$|f|(z) := |f(z)|,$$

$$\bar{f}(z) := \overline{f(z)},$$

$$\operatorname{Re}(f)(z) := \operatorname{Re}(f(z)),$$

$$\operatorname{Im}(f)(z) := \operatorname{Im}(f(z)).$$

Insbesondere gilt $f = \operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f)$ und $|f|^2 = f \cdot \bar{f} = \operatorname{Re}(f)^2 + \operatorname{Im}(f)^2$.

4.1 Definition stetiger Funktionen und Beispiele

Definition 4.3. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in $x_0 \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein (von ε und x_0 abhängiges) $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

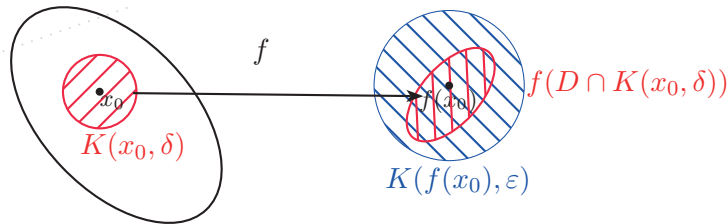
Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt stetig auf D , wenn f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Geometrische Deutung der Stetigkeit:

1. Komplexe Funktionen:

Eine komplexe Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass die offene Kreisscheibe um x_0 vom Radius δ durch f in die offene Kreisscheibe um $f(x_0)$ vom Radius ε abgebildet wird:

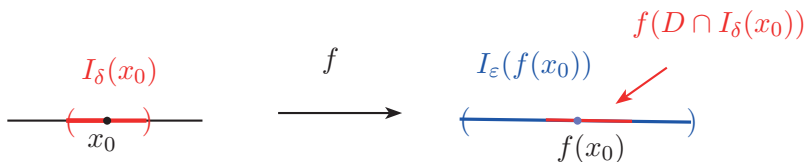
$$f(D \cap K(x_0, \delta)) \subset K(f(x_0), \varepsilon).$$



2. Reelle Funktionen:

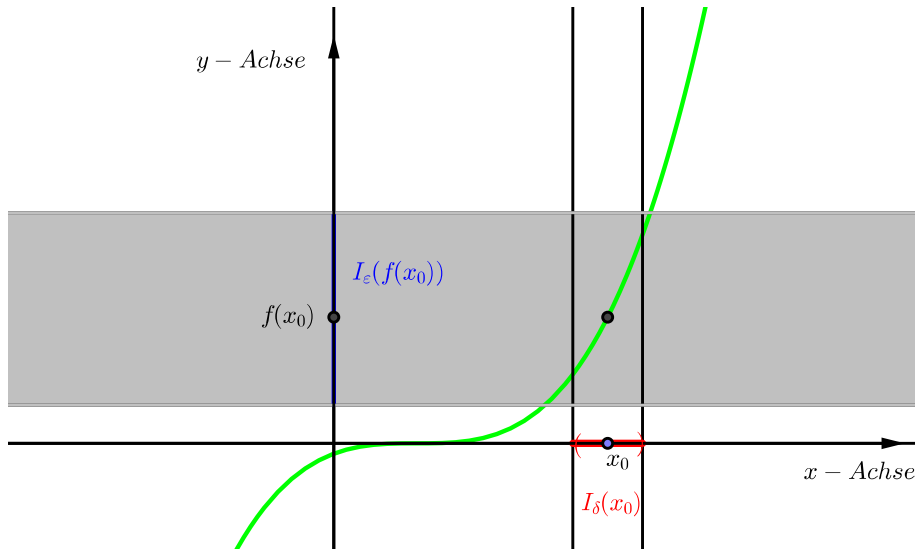
Eine reelle Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass das offene Intervall $I_\delta(x_0) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ durch f in das offene Intervall $I_\varepsilon(f(x_0)) := (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ abgebildet wird:

$$f(D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).$$



Dies kann man auch am Graphen der Funktion f ablesen: Der Graph von $f|_{I_\delta(x_0)}$ liegt im Streifen $D \times I_\varepsilon(f(x_0)) \subset D \times \mathbb{R}$:

$$\Gamma_{f|_{I_\delta(x_0)}} := \{(x, f(x)) \mid x \in I_\delta(x_0)\} \subset D \times I_\varepsilon(f(x_0)).$$



Satz 4.1 (Folgenkriterium für Stetigkeit)

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn für jede Folge (x_n) in D , die gegen x_0 konvergiert, auch die Bildfolge $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

Beweis. 1. (\implies): Wir setzen voraus, dass $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ in $x_0 \in D$ stetig ist und zeigen die Folgenbedingung des Satzes. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition der Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Sei nun (x_n) eine Folge in D , die gegen x_0 konvergiert. Nach Definition der Konvergenz gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Nach Voraussetzung gilt dann $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Da ε beliebig war, bedeutet dies, dass $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

2. (\impliedby): Wir setzen voraus, dass die Folgenbedingung des Satzes gilt. Wir führen den Beweis der Stetigkeit von f in x_0 indirekt: Angenommen f ist in x_0 nicht stetig. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x_\delta \in D$ existiert mit $|x_\delta - x_0| < \delta$, aber $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Wir betrachten nun speziell $\delta = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Wir haben also eine Folge (x_n) in D gefunden, die gegen x_0 konvergiert, für die die Bildfolge $(f(x_n))$ aber nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren kann. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich war die Annahme falsch, f ist also in x_0 stetig. \square

Mit dem Folgenkriterium kann man die Stetigkeit einer Funktion leicht mit Hilfe der Grenzwertsätze für Folgen untersuchen. Wir zeigen dies an den folgenden Beispielen.

Beispiel 1: Seien $f, g : [0, 2] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die reellen Funktionen

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0, 1], \\ 2 & \text{falls } x \in (1, 2]. \end{cases} \quad g(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq 1, \\ 2 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

f und g sind in $x = 1$ nicht stetig. Wir betrachten dazu die spezielle Folge (x_n) mit $x_n := 1 + \frac{1}{n}$. Dann konvergiert (x_n) gegen 1, aber $f(x_n) = 2 \not\rightarrow f(1) = 1$ und $g(x_n) = 1 \not\rightarrow g(1) = 2$. Die Behauptung folgt aus Satz 4.1.

Beispiel 2: Die Identität $Id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig.

Beweis: Für jede Folge (z_n) in \mathbb{C} mit $z_n \rightarrow z$ gilt $Id_{\mathbb{C}}(z_n) = z_n \rightarrow Id_{\mathbb{C}}(z) = z$.

Beispiel 3: Die konstante Abbildung $c_a : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die jedem $z \in D$ die fixierte Zahl $a \in \mathbb{C}$ zuordnet, ist stetig. Ist nämlich (z_n) eine Folge in D , die gegen $z \in D$ konvergiert, so konvergiert $(c_a(z_n) = a)$ gegen $c_a(z) = a$.

Beispiel 4: *Polynome*

Seien $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ und $P(z) := \sum_{k=0}^m a_k z^k = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ein Polynom. Dann ist die Funktion

$$P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

auf \mathbb{C} stetig. Zum Beweis benutzen wir wieder die Grenzwertsätze für konvergente Folgen aus Kapitel 3.1 und das Folgenkriterium für die Stetigkeit. Sei (z_n) eine Folge komplexer Zahlen, die gegen $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt $z_n^k \rightarrow z^k$ und somit $a_k z_n^k \rightarrow a_k z^k$ für alle $k \in \{0, 1, \dots, m\}$. Folglich gilt $P(z_n) \rightarrow P(z)$.

Beispiel 5: *Rationale Funktionen*

Es seien P und Q komplexe Polynome und $D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge, die keine Nullstelle von Q enthält. Dann ist die *rationale Funktion*

$$R := \frac{P}{Q} : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$$

auf D stetig. Dies folgt wie in Beispiel 4 aus den Grenzwertsätzen für konvergente Folgen und dem Folgenkriterium für die Stetigkeit.

Beispiel 6: *Potenz- und Wurzelfunktionen*

Sei q eine rationale Zahl. Dann ist die Potenzfunktion

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^q$$

stetig. Insbesondere ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Wurzelfunktion

$$\sqrt[m]{} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt[m]{x}$$

stetig. Zum Beweis benutzen wir die Übungsaufgabe 22: Ist (x_n) eine Folge in \mathbb{R}^+ , die gegen $x \in \mathbb{R}^+$ konvergiert, so konvergiert die Folge (x_n^q) gegen x^q .

Beispiel 7: Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig, denn aus $z_n \rightarrow z$ folgt $e^{z_n} \rightarrow e^z$ (Satz 3.30).

Beispiel 8: Die Betragsfunktion $|\cdot| : z \in \mathbb{C} \mapsto |z| \in \mathbb{R}$ ist stetig, denn aus $z_n \rightarrow z$ folgt $|z_n| \rightarrow |z|$ (Satz 3.3).

Satz 4.2 1. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ in $x_0 \in D$ stetig. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls g auf D keine Nullstelle hat), $|f|$ und \bar{f} in x_0 stetig.
 2. $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist in $x_0 \in D$ genau dann stetig, wenn die beiden Funktionen $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ in $x_0 \in D$ stetig sind.
 3. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\hat{D} \subset D$ eine Teilmenge. Dann ist die Einschränkung $f|_{\hat{D}} : \hat{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ebenfalls stetig.

Beweis. Für den Beweis aller drei Aussagen können wir das Folgenkriterium aus Satz 4.1 und die Grenzwertsätze für Folgen benutzen. Wir demonstrieren dies am Beweis der Stetigkeit von $f + g$ in x_0 . Die anderen Behauptungen zeigt man analog. Sei (x_n) eine Folge in D , die gegen x_0 konvergiert. Da f und g in x_0 stetig sind, konvergiert dann die Folge $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ und die Folge $(g(x_n))$ gegen $g(x_0)$. Aus dem Grenzwertsatz für die Summe konvergenter Folgen erhält man

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0).$$

Somit ist $f + g$ in x_0 stetig. □

Beispiel 9: Die reelle Exponentialfunktion $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Satz 4.3 Seien $D, \hat{D} \subset \mathbb{C}$ Teilmengen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : \hat{D} \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen mit $f(D) \subset \hat{D}$ sowie $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$ die Verknüpfung von f und g :

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad x \in D.$$

Dann gilt: Sind f in $x_0 \in D$ und g in $f(x_0)$ stetig, so ist die Verknüpfung $g \circ f$ in x_0 stetig.

Beweis. Wir benutzen zum Beweis das Folgenkriterium für die Stetigkeit. Sei (x_n) eine Folge in D , die gegen x_0 konvergiert. Da f in x_0 stetig ist, konvergiert die Folge $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$. Da g in $f(x_0)$ stetig ist, konvergiert die Folge $(g(f(x_n)) = (g \circ f)(x_n))$ gegen $g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$. Somit ist $g \circ f$ in x_0 stetig. □

Beispiel 10: Die Funktion $h : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $h(x) := e^{\frac{x^2}{x+1}}$, ist stetig, denn sie ist die Verknüpfung der stetigen Funktionen $h = \exp \circ f$ mit $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

Als nächstes beweisen wir einen Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion reeller Funktionen mit Hilfe der $\varepsilon - \delta$ - Definition.

Satz 4.4 (Stetigkeit der Umkehrfunktion)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend mit dem Bild $D = f(I)$. Dann ist $f : I \rightarrow D$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : D \rightarrow I$ ist streng monoton wachsend und stetig.

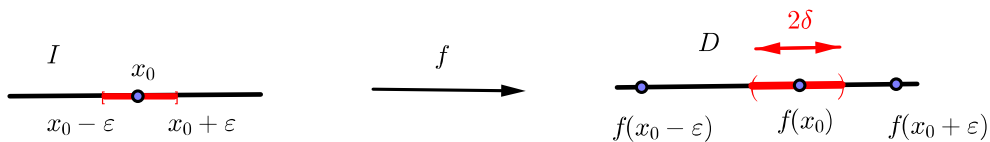
(Die analoge Aussage gilt auch für streng monoton fallende Funktionen f).

Beweis. a) Jede streng monoton wachsende Funktion ist injektiv. Da $D = f(I)$, ist $f : I \rightarrow D$ auch surjektiv, d.h. $f : I \rightarrow D$ ist bijektiv.

b) Es gelte $f(x) < f(y)$ für $x, y \in I$. Da f streng monoton wachsend ist, ist dies nur möglich, wenn $x < y$. Folglich gilt $x = f^{-1}(f(x)) < y = f^{-1}(f(y))$, d.h. f^{-1} ist ebenfalls streng monoton wachsend.

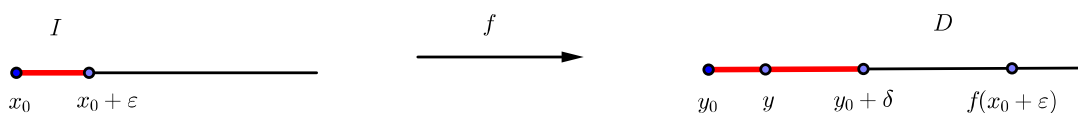
c) Wir zeigen, dass $f^{-1} : D \rightarrow I$ stetig ist: Sei $y_0 = f(x_0) \in D$ und $\varepsilon > 0$. Wir müssen ein $\delta > 0$ angeben, so dass $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$ für alle $y \in D$ mit $|y - y_0| < \delta$.

1. *Fall:* x_0 ist kein Randpunkt des Intervalls I . Dann kann man oBdA annehmen, dass $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$ gilt (ggf. nach Verkleinern von ε). Wir wählen $\delta > 0$ so klein, dass $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$.



Für $y \in D$ mit $|y - y_0| < \delta$ gilt dann $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, folgt $x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$ und somit $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$.

2. *Fall:* $x_0 \in I$ ist linker Randpunkt des Intervalls I , d.h. $x_0 = \min(I)$. Dann können wir oBdA. annehmen, dass $[x_0, x_0 + \varepsilon] \subset I$ (ε ggf. verkleinern). Wir wählen nun $\delta > 0$ so klein, dass $[y_0, y_0 + \delta] \subset [y_0, f(x_0 + \varepsilon))$.



Für alle $y \in D$ mit $|y - y_0| < \delta$ gilt dann $y_0 = f(x_0) \leq y < f(x_0 + \varepsilon)$. Da f^{-1} streng monoton wachsend ist, folgt $x_0 \leq f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$, d.h. $|f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$.

3. *Fall:* x_0 ist rechter Randpunkt des Intervalls I , d.h. $x_0 = \max(I)$. Der Beweis in diesem Fall wird analog zu Fall 2 geführt. \square

Beispiel 11: Die Logarithmus-Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Bemerkung zu Satz 4.4: Wir haben in Satz 4.4 nicht vorausgesetzt, dass f selbst stetig ist. Die Unstetigkeit von f führt zu einem unzusammenhängenden Definitionsbereich D

von f^{-1} , auf dem f^{-1} aber immer stetig ist. Satz 4.4 gilt nicht, wenn I kein Intervall ist. Als Beispiel betrachten wir die bijektive, streng monoton wachsende Funktion $f : [0, 1] \cup (2, 3] \rightarrow [0, 2]$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{falls } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, 2] \rightarrow [0, 1] \cup (2, 3]$ ist gegeben durch

$$f^{-1}(y) := \begin{cases} y & \text{falls } y \in [0, 1] \\ y + 1 & \text{falls } y \in (1, 2]. \end{cases}$$

f^{-1} ist in $y_0 = 1$ nicht stetig.

Die bisher definierte Stetigkeit beschreibt ein *lokales* Verhalten der Funktion f um jeden Punkt des Definitionsbereiches. Als nächstes definieren wir zwei Stetigkeitsbegriffe, die stärker als die gewöhnliche Stetigkeit sind und *globale* Eigenschaften von f beschreiben.

Definition 4.4.

1. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(Im Unterschied zur Definition der Stetigkeit hängt hier die Größe von δ nur von ε , aber nicht von x oder y ab.)

2. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *lipschitzstetig*, wenn es eine positive Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|.$$

L heißt *Lipschitz-Konstante* von f .

Satz 4.5 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann gilt:

1. f ist lipschitzstetig $\implies f$ ist gleichmäßig stetig.
2. f ist gleichmäßig stetig $\implies f$ ist stetig.

Beweis. Stetigkeit folgt per Definition aus gleichmäßiger Stetigkeit. Wir müssen also nur zeigen, dass jede lipschitzstetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

Sei f lipschitzstetig mit Lipschitz-Konstante L und $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$. Seien nun $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Aus der Lipschitzstetigkeit folgt dann

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| < L \cdot \delta = \varepsilon.$$

Somit ist f gleichmäßig stetig. □

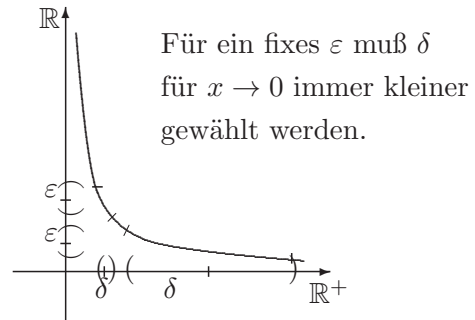
Die folgenden beiden Beispiele zeigen, dass die Umkehrungen der Aussagen von Satz 4.5 nicht gelten.

Beispiel 12:

Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.



Beweis. Sei $\delta > 0$ eine fixierte Zahl und $x \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt

$$\left| f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - f(x) \right| = \left| \frac{1}{x + \frac{\delta}{2}} - \frac{1}{x} \right| = \frac{\delta}{2x(x + \frac{\delta}{2})}. \quad (*)$$

Die rechte Seite von (*) konvergiert bei $x \rightarrow 0$ gegen $+\infty$. Man kann also für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ kein $\delta > 0$ finden, so dass die rechte Seite von (*) für jedes $x > 0$ kleiner als ε bleibt. Folglich ist f nicht gleichmäßig stetig. \square

Beispiel 13: Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

ist gleichmäßig stetig, aber nicht lipschitzstetig.

Beweis. Nach Übungsaufgabe 15 gilt

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Für $\varepsilon > 0$ setzen wir $\delta := \varepsilon^2$. Ist $|x - y| < \delta$, so folgt $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon$. Somit ist f gleichmäßig stetig.

Angenommen f wäre lipschitzstetig mit der Lipschitz-Konstanten L , das heißt

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Dann gilt

$$\left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq L \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Für hinreichend kleine x und y kann man aber $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ beliebig groß machen. Dies ergibt den Widerspruch. \square

Beispiel 14: Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ist lipschitzstetig mit der Lipschitz-Konstanten $L = 1$, denn es gilt $||z| - |w|| \leq |z - w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ (Satz 2.14).

4.2 Grenzwerte von Funktionen und stetige Fortsetzungen

Wir wissen bereits, dass die Einschränkung einer stetigen Funktion auf eine Teilmenge wieder stetig ist. Wir stellen nun die umgekehrte Frage: Kann man eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ auf eine größere Teilmenge $\tilde{D} := D \cup \{a\}$ stetig fortsetzen, wobei a nicht zu D gehört. Dies geht offensichtlich nicht immer, wie die Funktionen f und g aus Beispiel 1 zeigen: Diese Funktionen sind auf $D = [0, 1) \cup (1, 2]$ stetig, aber nicht auf $\tilde{D} := [0, 2]$. Beim Fortsetzungsproblem in den Punkt a muß man zwei Fälle unterscheiden: a ist ein Häufungspunkt von D oder nicht.

Definition 4.5. Sei $D \subset \mathbb{C}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt von D , wenn es eine Folge (z_n) in $D \setminus \{a\}$ gibt, die gegen a konvergiert.

$HP(D)$ bezeichne der Menge der Häufungspunkte von D .

Beispiel 15: $HP((a, b)) = [a, b]$, $HP(K(z_0, R)) = cl K(z_0, R)$,

$$HP(\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}) = \{0\}, \quad HP(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}.$$

1. Fall: Sei $a \in \mathbb{C}$ kein Häufungspunkt von D und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist jede Fortsetzung $F : \tilde{D} := D \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ von f stetig. Dies folgt aus dem Folgenkriterium für die Stetigkeit: Ist a kein Häufungspunkt von D , so sind für jede Folge (z_n) in \tilde{D} , die gegen a konvergiert, fast alle¹ Folgenglieder gleich a . Damit gilt $F(z_n) = F(a)$ für fast alle z_n . Die Folge $(F(z_n))$ konvergiert also gegen $F(a)$.

2. Fall: Sei $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D und $F : \tilde{D} := D \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Fortsetzung der stetigen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist F nach dem Folgenkriterium genau dann in a stetig, wenn für jede Folge (z_n) aus \tilde{D} , die gegen a konvergiert, die Bildfolge $(F(z_n))$ gegen den Wert $F(a)$ konvergiert. Dabei genügt es, Folgen (z_n) zu betrachten, die vollständig in $D \setminus \{a\}$ liegen, für die dann $(f(z_n) = F(z_n))$ gegen $F(a)$ konvergieren muß.

Dies führt auf die folgende Definition und das folgende Stetigkeitskriterium:

Definition 4.6. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ hat im Häufungspunkt $a \in HP(D)$ den Grenzwert b , wenn für jede Folge (z_n) aus $D \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert, die Bildfolge $(f(z_n))$ gegen b konvergiert.

Bezeichnung: $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b$.

Aus dem Folgenkriterium für die Stetigkeit erhält man sofort:

Satz 4.6 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

1. Ist $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D , so ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann in x_0 stetig, wenn f in x_0 einen Grenzwert besitzt und dieser gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ ist:

$$f(x_0) = \lim_{z \rightarrow x_0} f(z).$$

¹ fast alle bedeutet: alle bis auf endlich viele.

2. Ist $a \in HP(D) \setminus D$, so besitzt f genau dann eine in a stetige Fortsetzung $F : D \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$, wenn f in a einen Grenzwert besitzt. In diesem Fall gilt:

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \in D \\ \lim_{z \rightarrow a} f(z) & \text{falls } z = a. \end{cases}$$

Für Grenzwerte von Funktionen gelten die gleichen Rechenregeln wie für Grenzwerte konvergenter Folgen:

Satz 4.7 Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen, $a \in HP(D)$ und existieren die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, dann existieren die Grenzwerte von $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls g auf D keine Nullstelle hat und $c \neq 0$), $|f|$, \overline{f} , $Re(f)$ und $Im(f)$ im Punkt a und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) &= b + c, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) &= b \cdot c, \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{b}{c}, \\ \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| &= |b|, \\ \lim_{x \rightarrow a} \overline{f(x)} &= \overline{b}, \\ \lim_{x \rightarrow a} Re(f(x)) &= Re(b), \\ \lim_{x \rightarrow a} Im(f(x)) &= Im(b). \end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun den Spezialfall reeller Funktionen. In den reellen Zahlen hatten wir außer konvergenten Folgen auch Folgen betrachtet, die gegen $+\infty$ oder $-\infty$ streben und diesen den *uneigentlichen* Grenzwert $\pm\infty$ zugeordnet. Wir betrachten die analoge Situation für Grenzwerte von Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und vereinbaren analog zu Definition 4.6 die folgenden Bezeichnungen:

Definition 4.7. Sei $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, $a \in HP(D)$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ $:\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{a\}$ mit $x_n \rightarrow a$ gilt $f(x_n) \rightarrow +\infty$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ $:\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{a\}$ mit $x_n \rightarrow a$ gilt $f(x_n) \rightarrow -\infty$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ $:\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \rightarrow +\infty$ gilt $f(x_n) \rightarrow b$.
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ $:\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \rightarrow -\infty$ gilt $f(x_n) \rightarrow b$.

Dabei gelte in 3. $(c, +\infty) \subset D$ und in 4. $(-\infty, c) \subset D$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 16: Seien $f_1, f_2 : (0, +\infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_1(x) := \frac{\cos x}{x}, \quad f_2(x) := \cos x$$

Dann gilt $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$, während der Grenzwert von f_2 für $x \rightarrow +\infty$ nicht existiert.

Beweis. Die erste Behauptung folgt, da $|f_1(x)| \leq \frac{1}{x}$. Für die 2. Behauptung betrachte man die Folgen (x_n) mit $x_n := 2n\pi$ und (y_n) mit $y_n := (2n+1)\pi$. Dann gilt $f_2(x_n) = 1 \rightarrow 1$ und $f_2(y_n) = -1 \rightarrow -1$. Folglich hat f_2 für $x \rightarrow +\infty$ keinen Grenzwert. \square

Beispiel 17: Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{\ln(x)} = +\infty.$$

D.h. die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz und jede Potenz mit positivem Exponenten wächst schneller als die Logarithmusfunktion.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in \mathbb{R}^+ mit $x_n \rightarrow +\infty$ und k eine fixierte natürliche Zahl mit $k \geq \alpha + 1$. Dann gilt:

$$e^{x_n} \geq \frac{x_n^k}{k!} \geq \frac{x_n^{\alpha+1}}{k!} = x_n^\alpha \cdot \frac{x_n}{k!}.$$

Folglich ist

$$\frac{e^{x_n}}{x_n^\alpha} \geq \frac{x_n}{k!}.$$

Da $x_n \rightarrow +\infty$ folgt $\frac{e^{x_n}}{x_n^\alpha} \rightarrow +\infty$.

Sei (y_n) eine Folge in \mathbb{R}^+ mit $y_n \rightarrow +\infty$. Da $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv und streng monoton wachsend ist, gilt $\ln(y_n) \rightarrow +\infty$. Da β positiv ist, folgt $x_n := \ln(y_n) \cdot \beta \rightarrow +\infty$. Wir erhalten aus der ersten Behauptung:

$$\frac{y_n^\beta}{\ln(y_n)} = \frac{e^{\ln(y_n) \cdot \beta}}{\ln(y_n)} = \beta \cdot \frac{e^{\ln(y_n) \cdot \beta}}{\ln(y_n) \cdot \beta} = \beta \cdot \frac{e^{x_n}}{x_n} \rightarrow +\infty.$$

\square

Im Fall von reellen Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kann man einseitige Grenzwerte definieren. Wir betrachten dazu die folgenden Teilmengen der Menge der Häufungspunkte von D :

$$HP(D)^- := \{a \in \mathbb{R} \mid \text{es existiert eine Folge } (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n < a \text{ und } x_n \rightarrow a\}.$$

$$HP(D)^+ := \{a \in \mathbb{R} \mid \text{es existiert eine Folge } (x_n) \text{ in } D \text{ mit } x_n > a \text{ und } x_n \rightarrow a\}.$$

Definition 4.8. Sei $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. Man sagt, dass der linksseitige Grenzwert von f in $a \in HP(D)^-$ existiert und gleich b ist, falls für jede gegen a konvergente Folge (x_n) in D mit $x_n < a$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Wir bezeichnen den linksseitigen Grenzwert mit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$.

2. Man sagt, dass der rechtsseitige Grenzwert von f in $a \in HP(D)^+$ existiert und gleich b ist, falls für jede gegen a konvergente Folge (x_n) in D mit $x_n > a$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Wir bezeichnen den rechtsseitigen Grenzwert mit $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$.

Wir können die Stetigkeit reeller Funktionen durch die einseitigen Grenzwerte charakterisieren:

Satz 4.8 Sei $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in (c, d) \subset D$. Dann ist f in x_0 genau dann stetig, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte von f im Punkt x_0 in \mathbb{R} existieren und gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ sind:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Beweis. (\implies) folgt aus Satz 4.1 als Spezialfall.

(\impliedby) Wir setzen voraus, dass die beiden einseitigen Grenzwerte existieren und dass gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Angenommen, f sei in x_0 nicht stetig. Dann existiert nach dem Folgenkriterium eine Folge (x_n) in D , die gegen x_0 konvergiert, deren Bildfolge aber nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert. Da dann fast alle Folgenglieder x_n von x_0 verschieden sind, existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit $x_{n_k} < x_0$ oder eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit $x_{n_k} > x_0$, deren Bildfolge $(f(x_{n_k}))$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert. Dies widerspricht der Voraussetzung $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$. \square

Satz 4.8 zeigt, dass es genau drei verschiedene Typen von Unstetigkeitsstellen einer reellen Funktion gibt. Die Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in (c, d) \subset D$ *unstetig*, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

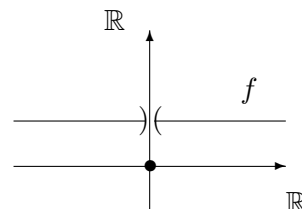
(1) *Hebbare Unstetigkeitsstelle*

Beide einseitigen Grenzwerte von f in x_0 existieren in \mathbb{R} und stimmen überein, sind aber ungleich $f(x_0)$. In diesem Fall kann man die Unstetigkeit von f in x_0 durch Abänderung von $f(x_0)$ beheben.

Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$$

Der Punkt $x_0 = 0$ ist eine hebbare Unstetigkeitsstelle.



(2) *Sprungstelle*

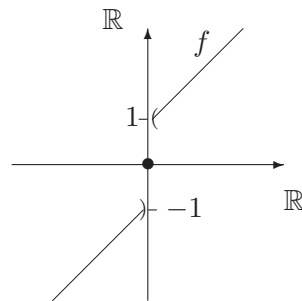
Die beiden einseitigen Grenzwerte von f in x_0 existieren in \mathbb{R} , sind aber voneinander verschieden. Unter dem *Sprung* $\sigma(f, x_0)$ von f in x_0 verstehen wir die Differenz der einseitigen Grenzwerte

$$\sigma(f, x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} x + \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dann ist der Punkt $x_0 = 0$ eine Sprungstelle und der Sprung $\sigma(f, x_0) = 2$.



(3) Unstetigkeitsstelle 2. Art²

Mindestens einer der beiden einseitigen Grenzwerte von f in x_0 existiert nicht in \mathbb{R} . Die folgenden Beispiele zeigen die beiden typischen Fälle für diese Situation: Als erstes betrachten wir die Dirichlet-Funktion

$$h(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

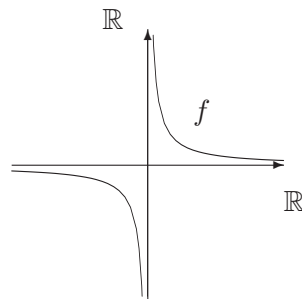
Jeder Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine Unstetigkeitsstelle zweiter Art von h , da h in x_0 keinen rechtsseitigen und keinen linksseitigen Grenzwert besitzt.

Das nächste Beispiel zeigt einen Fall mit uneigentlichen Grenzwerten.

Sei

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Der Punkt $x_0 = 0$ ist eine Unstetigkeitsstelle zweiter Art, denn $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.



Als Spezialfall betrachten wir monotone Funktionen.

Satz 4.9 Sei $f : (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monotone Funktion und $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Dann gilt:

1. Für jedes $x_0 \in (\alpha, \beta)$ existieren die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ in \mathbb{R} .
2. f ist in $x_0 \in (\alpha, \beta)$ genau dann stetig, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.
3. f hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Jede Unstetigkeitsstelle ist eine Sprungstelle.

Beweis. Übungsaufgabe. □

² Hebbare Unstetigkeitsstellen und Sprungstellen nennt man auch Unstetigkeitsstellen 1. Art.

4.3 Nullstellen, Fixpunkte und Extremwerte stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einigen speziellen Eigenschaften stetiger Funktionen befassen. Insbesondere wollen wir Bedingungen dafür angeben, dass eine stetige Funktion Nullstellen, Fixpunkte bzw. Extremwerte besitzt.

Definition 4.9. Sei $D \subset \mathbb{R}$ oder $D \subset \mathbb{C}$.

1. Ein Punkt $\xi \in D$ heißt Nullstelle einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, wenn $f(\xi) = 0$.
2. Ein Punkt $\xi \in D$ heißt Fixpunkt einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, wenn $f(\xi) = \xi$.
3. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt auf D ein Minimum bzw. Maximum an, wenn es ein $\xi_1 \in D$ bzw. ein $\xi_2 \in D$ gibt, so dass

$$f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2) \quad \forall x \in D,$$

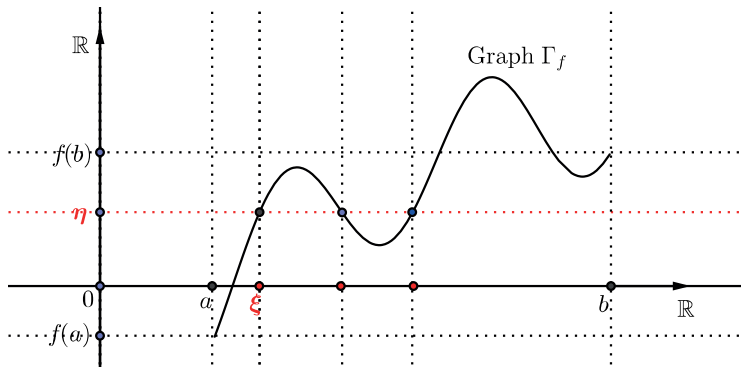
d.h. $f(\xi_1) = \min\{f(x) \mid x \in D\}$ bzw. $f(\xi_2) = \max\{f(x) \mid x \in D\}$.

Mit Hilfe des folgenden Satzes kann man in vielen Fällen die Existenz von Nullstellen oder Fixpunkten beweisen:

Satz 4.10 (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\eta \in \mathbb{R}$ eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \eta$.

Beweis. OBdA. sei $f(a) \leq f(b)$.



Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung $\{I_n = [a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$f(a_n) \leq \eta \leq f(b_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir setzen $I_0 := [a, b]$. Dann gilt nach Voraussetzung $f(a_0) \leq \eta \leq f(b_0)$.

Sei das Intervall $I_n := [a_n, b_n]$ mit $f(a_n) \leq \eta \leq f(b_n)$ schon konstruiert. Wir bilden dann I_{n+1} durch Halbierung von I_n : Sei $M_n := \frac{a_n + b_n}{2}$ der Mittelpunkt von $[a_n, b_n]$. Dann gilt entweder $\eta \leq f(M_n)$ oder $\eta > f(M_n)$. Wir setzen

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n, M_n], & \text{falls } \eta \leq f(M_n), \\ [M_n, b_n], & \text{falls } \eta > f(M_n), \end{cases}$$

und erhalten nach Konstruktion $f(a_{n+1}) \leq \eta \leq f(b_{n+1})$. Die Familie der abgeschlossenen Intervalle $\{I_n\}$ ist tatsächlich eine Intervallschachtelung, da nach Konstruktion

- a) $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
 b) $L(I_n) = \frac{1}{2}L(I_{n-1}) = \frac{1}{2^n}L(I_0) = \frac{1}{2^n}(b-a)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip (Satz 2.4) existiert genau eine reelle Zahl ξ mit $a_n \leq \xi \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da $|\xi - a_n| \leq |b_n - a_n| = L(I_n) \rightarrow 0$ und $|b_n - \xi| \leq |b_n - a_n| = L(I_n) \rightarrow 0$, konvergiert sowohl die Folge (a_n) als auch die Folge (b_n) gegen $\xi \in [a, b]$. Da f auf $[a, b]$ stetig ist, folgt mit dem Folgenkriterium der Stetigkeit $f(a_n) \rightarrow f(\xi)$ und $f(b_n) \rightarrow f(\xi)$. Da $f(a_n) \leq \eta \leq f(b_n)$ liefert das Sandwich-Lemma: $f(\xi) = \eta$. \square

Folgerung 4.1 1. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \cdot f(b) < 0$, d.h. $f(a)$ und $f(b)$ haben verschiedene Vorzeichen. Dann besitzt f eine Nullstelle in $[a, b]$.

2. Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt in $[a, b]$.

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 4.10 mit $\eta = 0$. Zum Beweis der zweiten Behauptung betrachten wir die Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := f(x) - x$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist g stetig und $g(a) = f(a) - a \geq 0$ und $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Dann sind a oder b Fixpunkte von f oder es gilt $g(a) > 0$ und $g(b) < 0$. Im zweiten Fall hat g eine Nullstelle in (a, b) , d.h. es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = \xi$. \square

Eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ muß keine Extremwerte, d.h. Maxima oder Minima, besitzen. Auf einer bestimmten Sorte von Definitionsbereichen D , den kompakten Mengen, die wir jetzt definieren, ist dies aber immer der Fall.

Definition 4.10. Sei $A \subset \mathbb{R}$ oder $A \subset \mathbb{C}$.

1. A heißt abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge (a_n) aus A der Grenzwert ebenfalls in A liegt.
2. A heißt beschränkt, wenn es ein $C \in \mathbb{R}^+$ gibt mit $|a| \leq C$ für alle $a \in A$.
3. A heißt kompakt³, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele:

- Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.
- Die abgeschlossene Kreisscheibe $cl K(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\} \subset \mathbb{C}$ ist kompakt.
- Die Kreislinie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ ist kompakt.

Satz 4.11 (Folgenkriterium für Kompaktheit)

Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ oder $K \subset \mathbb{C}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge (z_n) aus K eine Teilfolge besitzt, die gegen ein Element aus K konvergiert.

³ Abgeschlossene, beschränkte und kompakte Mengen definiert man auch in metrischen Räumen, die die Räume $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ verallgemeinern. In metrischen Räumen ist jede kompakte Menge beschränkt und abgeschlossen, die Umkehrung gilt aber im Allgemeinen nicht!

Beweis. (\implies): Sei K kompakt und (z_n) eine Folge in K . Da K beschränkt ist, existiert ein $C \in \mathbb{R}^+$ mit $|z_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $K \subset \mathbb{R}$, so besagt der Satz von Bolzano-Weierstraß, dass (z_n) eine konvergente Teilfolge (z_{n_k}) besitzt. Ist $K \subset \mathbb{C}$, aber $K \not\subset \mathbb{R}$, so betrachten wir die Folge der Realteile $(\operatorname{Re}(z_n))$ und der Imaginärteile $(\operatorname{Im}(z_n))$. Diese Folgen sind dann ebenfalls beschränkt und der Satz von Bolzano-Weierstraß liefert eine Teilfolge (z_{n_k}) von (z_n) , für die $(\operatorname{Re}(z_{n_k}))$ und $(\operatorname{Im}(z_{n_k}))$ konvergieren. Dann konvergiert aber auch die Teilfolge (z_{n_k}) in \mathbb{C} . Da K abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert von (z_{n_k}) in K .

(\impliedby): Wir setzen voraus, dass jede Folge aus K eine Teilfolge besitzt, die gegen ein Element von K konvergiert und zeigen, dass K kompakt ist:

- a) K ist beschränkt: Angenommen, K wäre nicht beschränkt. Dann gibt es eine Folge (z_n) in K mit $|z_n| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge (z_n) enthält keine konvergente Teilfolge. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.
- b) K ist abgeschlossen: Sei (z_n) eine Folge in K mit $z_n \rightarrow z$. Nach Voraussetzung existiert eine Teilfolge (z_{n_k}) von (z_n) mit Grenzwert in K . Dann gilt $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k}$ und somit $z \in K$. \square

Satz 4.12 Sei $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge K . Dann ist das Bild $f(K) \subset \mathbb{C}$ ebenfalls kompakt.

Beweis. Sei $(f(z_n))$ eine beliebige Folge in $f(K)$. Dann ist (z_n) eine Folge in K . Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge (z_{n_k}) von (z_n) , die gegen ein Element $\xi \in K$ konvergiert. Da f stetig ist, konvergiert $(f(z_{n_k}))$ gegen $f(\xi) \in f(K)$. Folglich ist $f(K)$ kompakt. \square

Satz 4.13 Sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge K . Dann nimmt f auf K ein Minimum und ein Maximum an, d.h. es existieren $\xi_1, \xi_2 \in K$ mit

$$f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2) \quad \text{für alle } x \in K.$$

Beweis. Nach Satz 4.12 ist $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also beschränkt, d.h. es existieren $\sup f(K)$ und $\inf f(K)$. Nach Definition von Supremum und Infimum existieren Folgen (x_n) und (y_n) in K mit $f(x_n) \rightarrow \inf f(K)$ und $f(y_n) \rightarrow \sup f(K)$. Da $f(K)$ abgeschlossen ist, folgt $\inf f(K) \in f(K)$ und $\sup f(K) \in f(K)$. Also existieren $\xi_1 \in K$ und $\xi_2 \in K$, so dass $f(\xi_1) = \inf f(K) = \min f(K)$ und $f(\xi_2) = \sup f(K) = \max f(K)$. \square

Satz 4.14 Sei $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung auf einer kompakten Menge K . Dann ist f sogar gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen, f wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ ohne geeignetes δ (aus der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es also ein Paar von Zahlen $x_n, y_n \in K$, so dass

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0. \quad (4.1)$$

Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge (y_{n_k}) von (y_n) , die gegen ein Element $\xi \in K$ konvergiert. Dann gilt

$$|x_{n_k} - \xi| \leq |x_{n_k} - y_{n_k}| + |y_{n_k} - \xi| < \frac{1}{n_k} + |y_{n_k} - \xi|.$$

Folglich konvergiert (x_{n_k}) ebenfalls gegen ξ . Die Stetigkeit von f liefert $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k})$. Dann existiert aber ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon_0 \quad \forall k \geq k_0.$$

Dies widerspricht (4.1). □

4.4 Anwendung: Der Fundamentalsatz der Algebra

Als Anwendung von Satz 4.13 wollen wir nun den in Kapitel 2.2 angekündigten Fundamentalsatz der Algebra beweisen, der weitreichende Konsequenzen sowohl in der Algebra als auch in vielen Bereichen der Analysis hat.

Satz 4.15 (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes nicht-konstante komplexe Polynom besitzt eine Nullstelle.

Beweis. Sei $P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ein komplexes Polynom mit $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$.

1. *Schritt:* Wir zeigen, dass die Abbildung $|P| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ auf \mathbb{C} ein Minimum annimmt, d.h. es existiert ein $\xi \in \mathbb{C}$ mit $|P(\xi)| \leq |P(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Wir definieren dazu $Q(z)$ durch

$$P(z) = a_n z^n \left(1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n}}_{=: Q(z)} \right), \quad z \neq 0.$$

Sei nun $\alpha := \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right|$ und $\beta := \max\{1, 2\alpha\}$. Für $|z| \geq \beta$ folgt dann

$$|Q(z)| \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \frac{1}{|z|} + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \frac{1}{|z|^n} \leq \left(\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right) \frac{1}{|z|} = \alpha \cdot \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{2}.$$

Dies zeigt, dass

$$|1 + Q(z)| \geq ||1| - |Q(z)|| = 1 - |Q(z)| \geq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } |z| \geq \beta.$$

Wir setzen $r := \max\{\beta, (2\alpha)^{\frac{1}{n}}\}$. Dann folgt

$$|P(z)| = |a_n z^n| \cdot |1 + Q(z)| \geq |a_n| \cdot |z|^n \cdot \frac{1}{2} \geq |a_n| \cdot \alpha \quad \text{für alle } |z| \geq r.$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe $cl K(0, r)$ gilt also $|P(z)| \geq |a_n| \cdot \alpha$. Da abgeschlossene Kreisscheiben kompakt sind, nimmt $|P|$ auf $cl K(0, r)$ ein Minimum an. Da $|P(0)| = |a_0| \leq |a_n| \cdot \alpha$, ist dieses Minimum auch das Minimum von $|P|$ auf ganz \mathbb{C} . Damit ist gezeigt, dass ein $\xi \in \mathbb{C}$ existiert mit $|P(\xi)| = \min\{|P(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$.

2. Schritt: Wir zeigen, dass $P(\xi) = 0$.

Angenommen $P(\xi) \neq 0$. Wir betrachten das Polynom n -ten Grades

$$H(z) := \frac{P(z + \xi)}{P(\xi)}.$$

Da $|P|$ in ξ ein Minimum annimmt, gilt $|H(z)| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wegen $H(0) = 1$, hat H die Form

$$H(z) = b_n z^n + \dots + b_m z^m + 1,$$

wobei b_m, b_{m+1}, \dots, b_n komplexe Zahlen sind, $n \geq m \geq 1$ und $b_m \neq 0$. Die komplexe Zahl $-\frac{|b_m|}{b_m}$ hat den Betrag 1 und besitzt nach Satz 2.15 eine m -te Wurzel $w \in \mathbb{C}$, d.h. $w^m = -\frac{|b_m|}{b_m}$. Sei $w = \cos(\psi) + i \sin(\psi)$ die trigonometrische Darstellung von w . Dann ist $b_m (\cos(m\psi) + i \sin(m\psi)) = -|b_m|$. Wir betrachten nun H auf den komplexen Zahlen der Form $z = \varrho \cdot (\cos(\psi) + i \sin(\psi))$ mit $\varrho > 0$. Dann gilt

$$\left| H(\varrho \cdot (\cos(\psi) + i \sin(\psi))) \right| \leq |b_n| \cdot \varrho^n + \dots + |b_{m+1}| \cdot \varrho^{m+1} + \underbrace{|b_m \varrho^m \cdot (\cos(m\psi) + i \sin(m\psi)) + 1|}_{=|1 - |b_m| \cdot \varrho^m|}.$$

Sei nun ϱ so klein gewählt, dass $\varrho^m < \frac{1}{|b_m|}$ ist. Dann ist $1 - |b_m| \varrho^m > 0$ und damit

$$\begin{aligned} \left| H(\varrho \cdot (\cos(\psi) + i \sin(\psi))) \right| &\leq 1 - |b_m| \cdot \varrho^m + |b_{m+1}| \cdot \varrho^{m+1} + \dots + |b_n| \cdot \varrho^n \\ &= 1 - \varrho^m \underbrace{(|b_m| - |b_{m+1}| \cdot \varrho - \dots - |b_n| \cdot \varrho^{n-m})}_{>0 \text{ für } \varrho \text{ hinreichend klein}}. \end{aligned}$$

Somit ist $|H(\varrho \cdot (\cos(\psi) + i \sin(\psi)))| < 1$ für hinreichend kleine ϱ . Dies ist ein Widerspruch zu $|H(z)| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Somit war unsere Annahme falsch und es gilt $P(\xi) = 0$. \square

Satz 4.16 (Zerlegungssatz für komplexe Polynome)

Sei $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann existieren n Nullstellen $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$ von P und es gilt

$$P(z) = a_n (z - \xi_1) \cdot (z - \xi_2) \cdot \dots \cdot (z - \xi_n),$$

wobei die Nullstellen ξ_1, \dots, ξ_n nicht alle verschieden sein müssen.

Beweis. Sei $\xi_1 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P , d.h. $P(\xi_1) = 0$. Wir wollen von P den Linearfaktor $(z - \xi_1)$ abspalten. Dazu betrachten wir die Polynome

$$Q_k(z) := z^{k-1} + z^{k-2} \cdot \xi_1 + z^{k-3} \cdot \xi_1^2 + \dots + z \cdot \xi_1^{k-2} + \xi_1^{k-1}.$$

Dann gilt $z^k - \xi_1^k = (z - \xi_1) \cdot Q_k(z)$ und folglich

$$\begin{aligned}
 P(z) &= P(z) - P(\xi_1) = a_1(z - \xi_1) + a_2(z^2 - \xi_1^2) + \dots + a_n(z^n - \xi_1^n) \\
 &= (z - \xi_1) \cdot (a_1Q_1(z) + a_2Q_2(z) + \dots + a_nQ_n(z)) \\
 &=: (z - \xi_1) \cdot P_1(z).
 \end{aligned}$$

$P_1(z)$ ist dabei ein Polynom vom Grad $n - 1$. Ist $n - 1 \geq 1$, so hat P_1 eine Nullstelle und wir können einen weiteren Linearfaktor von P_1 abspalten. Dieses Verfahren funktioniert n -mal. \square

4.5 Die trigonometrischen und die Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen

Mit Hilfe der Exponentialfunktion definieren wir jetzt die trigonometrischen Funktionen sowie die Hyperbelfunktionen. Wir erinnern nochmal an die Definition der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned}
 \exp : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
 z &\longmapsto e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

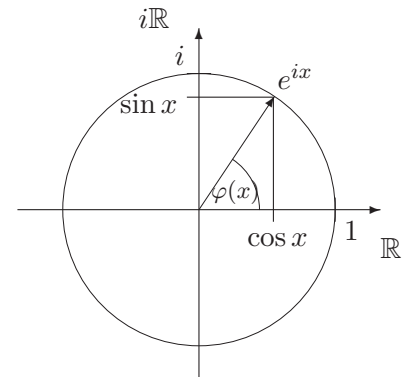
Diese Funktion ist auf \mathbb{C} stetig und erfüllt $e^0 = 1$ sowie $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

4.5.1 Die trigonometrischen Funktionen

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1.$$

Die komplexe Zahl e^{ix} liegt also auf der Kreislinie $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. $\varphi(x)$ bezeichne den orientierten Winkel zwischen der reellen Achse und dem Strahl von 0 durch e^{ix} (im Gradmaß).



Definition 4.11 (Analytische Definition der Funktionen sin und cos).

Den Realteil von e^{ix} nennen wir *Cosinus* der reellen Zahl x , den Imaginärteil von e^{ix} nennen wir *Sinus* von x , d.h.

$$\begin{aligned}
 \cos(x) &:= \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
 \sin(x) &:= \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.
 \end{aligned}$$

Dann erhält man unmittelbar die **Euler-Formel**

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wir hatten in Kapitel 2 bereits die elementargeometrisch definierten trigonometrischen Funktionen **sin** und **cos** benutzt. Die Definition 4.11 zeigt, dass $\sin(\varphi(x)) = \sin(x)$ und $\cos(\varphi(x)) = \cos(x)$. Man nennt x auch das Bogenmaß des orientierten Winkels zwischen der reellen Achse und dem Strahl von 0 durch e^{ix} , denn wie wir noch sehen werden, ist x die Länge der Kreisbogens von 1 nach e^{ix} . Im folgenden werden wir die analytische Definition der trigonometrischen Funktionen \sin und \cos benutzen.

Durch Einsetzen von e^{ix} in die Definitionen erhält man sofort die folgenden Eigenschaften und Rechenregeln für Sinus und Cosinus:

1. Die reellen Funktionen $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig.
2. \cos ist eine *gerade Funktion*, d.h. es gilt $\cos(-x) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
 \sin ist eine *ungerade Funktion*, d.h. es gilt $\sin(-x) = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
 $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$.
3. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(Da $\sin^2(x) + \cos^2(x) = |e^{ix}|^2 = 1$.)
4. *Additionstheoreme*: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).\end{aligned}$$

(Real- und Imaginärteil von $e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$ vergleichen).

5. *Differenzformeln*: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin(x) - \sin(y) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ \cos(x) - \cos(y) &= -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right).\end{aligned}$$

(Additionstheoreme auf $\frac{1}{2}(x+y) \pm \frac{1}{2}(x-y)$ anwenden.)

Einschließungslemma für \sin und \cos : Für alle reellen Zahlen $x \in (0, 2]$ gilt

$$\begin{aligned}1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \\ x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x.\end{aligned}$$

Beweis. Die Reihen $\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{=: b_k}$ und $\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=: c_k}$ sind

alternierende Reihen. Für $x \in (0, 2]$ sind $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ und $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ monoton fallende Nullfolgen positiver reeller Zahlen. Aus dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen (siehe Beweis von Satz 3.23) kennen wir eine Abschätzung des Reihenwertes s einer alternierenden Reihe durch die Partialsummen s_n der Reihe:

$$s_{2m+1} < s < s_{2m} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Für $\cos(x)$ und $x \in (0, 2]$ ergibt sich bei $m = 1$:

$$1 - \frac{x^2}{2} < 1 - \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!}}_{>0} = s_3 < \cos(x) < s_2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Für $\sin(x)$ und $x \in (0, 2]$ ergibt sich bei $m = 0$:

$$x - \frac{x^3}{6} = s_1 < \sin(x) < s_0 = x.$$

□

Als nächstes diskutieren wir den Kurvenverlauf der Funktionen \cos und \sin . Zunächst sehen wir uns die Nullstellen an:

Satz 4.17 Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat auf dem Intervall $(0, 2)$ genau eine Nullstelle.

Beweis. 1. *Existenz der Nullstelle:* Wie wir bereits wissen gilt $\cos(0) = 1$. Andererseits zeigt das Einschließungslemma

$$\cos(2) < 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24} = 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Da $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass ein $\xi \in (0, 2)$ mit $\cos(\xi) = 0$ existiert.

2. *Eindeutigkeit der Nullstelle:* Dazu zeigen wir, dass die Funktion \cos auf $(0, 2)$ streng monoton fallend ist:

a) Die Funktion \sin ist auf $(0, 2)$ positiv, da nach dem Einschließungslemma für $x \in (0, 2)$ gilt:

$$0 < x \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) = x - \frac{x^3}{6} < \sin(x).$$

b) Seien nun $x, y \in (0, 2)$ mit $x > y$. Dann gilt $\frac{x \pm y}{2} \in (0, 2)$. Aus den Differenzformeln folgt

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) < 0.$$

Folglich ist \cos auf dem Intervall $(0, 2)$ streng monoton fallend und somit ξ die einzige Nullstelle von \cos in $(0, 2)$. □

Definition 4.12 (Analytische Definition der Zahl π).

Die Nullstelle von \cos auf dem Intervall $(0, 2)$ heißt $\frac{\pi}{2}$.

In der Elementargeometrie definiert man die Zahl π als den Flächeninhalt der Kreisscheibe von Radius 1 und approximiert sie durch die Flächeninhalte von regelmäßigen n -Ecken mit Eckpunkten auf dem Rand der Kreisscheibe für $n \rightarrow \infty$. Dabei erhält man

$$\pi \approx 3,141592653\dots$$

Wir werden noch zeigen, dass beide Definitionen übereinstimmen. Die Zahl π ist irrational und transzendent, d.h. es gibt kein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, das π als Nullstelle hat.

Da $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, gilt $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und aus der Eulerformel folgt $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. Wegen $e^{ix+iy} = e^{ix} \cdot e^{iy}$ erhalten wir außerdem:

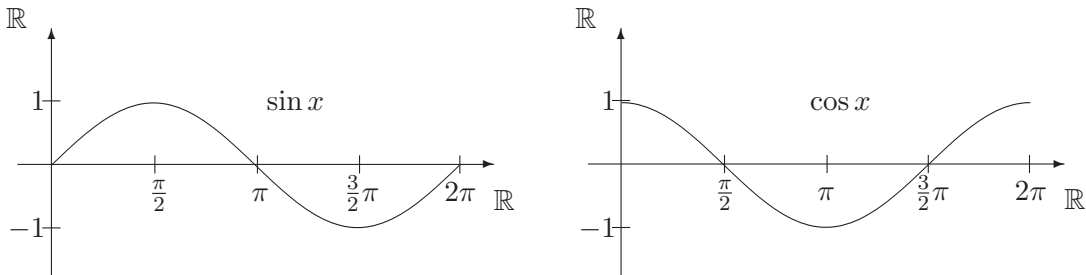
Folgerung 4.2 $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$.
 $e^{ix+2\pi ik} = e^{ix}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Der Vergleich von Real- und Imaginärteil in der Eulerschen Formel liefert dann die folgenden Beziehungen zwischen Sinus und Cosinus:

Folgerung 4.3 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\sin(x + \frac{\pi}{2}) &= +\cos(x), & \cos(x + \frac{\pi}{2}) &= -\sin(x), \\ \sin(x + \pi) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x), \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin(x), & \cos(x + 2\pi) &= \cos(x).\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die weiteren Nullstellen und die Monotoniebereiche von Sinus und Cosinus auf \mathbb{R} . Die folgenden Bilder zeigen den Kurvenverlauf der Cosinus- und Sinusfunktion auf $[0, 2\pi]$:



Die nächste Tabelle zeigt die wichtigsten konkreten Werte von \sin und \cos , die wir mit analytischen Mitteln herleiten werden⁴:

Satz 4.18 (Spezielle Werte von \sin und \cos)

<i>Bogenmaß</i>	x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
<i>Gradmaß</i>	$\varphi(x)$	0°	30°	45°	60°	90°
	$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
	$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

⁴ Ich empfehle Ihnen, sich auch eine elementargeometrische Herleitung der speziellen Werte von \sin und \cos zu überlegen (Benutze Basiswinkelsatz und Satz des Pythagoras).

Beweis. a) Umrechnung vom Bogenmaß ins Gradmaß: $\varphi(0) = 0^\circ$ ist wegen $e^{i0} = 1$ offensichtlich. Da $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ folgt $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 90^\circ$. Bei der Multiplikation der komplexen Zahlen e^{ix} und e^{iy} addieren sich die Winkel $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$. Wegen $e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{i(x+y)}$ folgt dann $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y)$. Damit erhält man die anderen Umrechnungen vom Bogen- ins Gradmaß.

b) $x = \frac{\pi}{4}$: Nach Folgerung 4.3 gilt:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Folglich ist

$$1 = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Da $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ folgt

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

c) $x = \frac{\pi}{3}$: Wir setzen $z := e^{i\frac{\pi}{3}}$. Dann gilt $z^3 = (e^{i\frac{\pi}{3}})^3 = e^{i\pi} = -1$ und wir erhalten $0 = z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1)$. Da $z \neq -1$ folgt $z^2 - z + 1 = 0$ und somit $z - 1 + \frac{1}{z} = 0$. Deshalb gilt

$$1 = e^{i\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Dies zeigt, dass $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ und folglich $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

d) $x = \frac{\pi}{6}$: Nach Folgerung 4.3 gilt

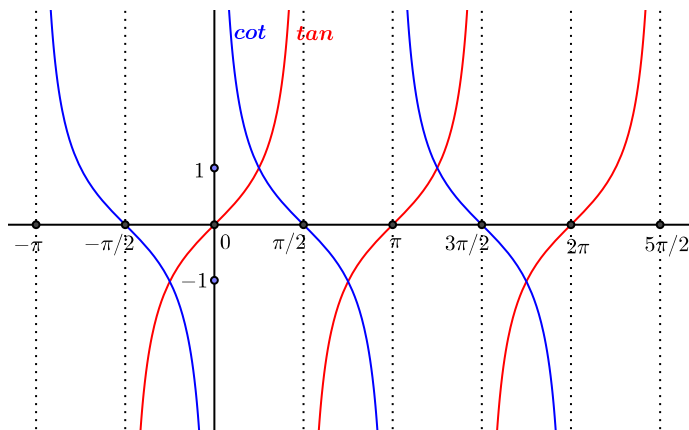
$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

und deshalb auch $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. □

Mittels der Sinus- und Cosinusfunktion definieren wir die trigonometrischen Funktionen Tangens (tan) und Cotangens (cot):

$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{aligned}$$



Aus den Eigenschaften von Sinus und Cosinus erhält man die folgenden Eigenschaften von Tangens- und Cotangensfunktion:

1. \tan und \cot sind stetige, π -periodische, ungerade Funktionen.
2. Es gelten folgende *Additionstheoreme*:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)} \quad \text{und} \quad \cot(x + y) = \frac{\cot(x) \cdot \cot(y) - 1}{\cot(x) + \cot(y)}.$$

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Da die trigonometrischen Funktionen periodisch sind, existieren keine globalen Umkehrfunktionen. Es existieren aber Umkehrfunktionen auf jedem Monotoniebereich der trigonometrischen Funktionen. Nach Satz 4.4 sind diese Umkehrfunktionen ebenfalls stetig.

Definition 4.13. Die Umkehrfunktion von $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ heißt *Arcussinus* und wird mit \arcsin bezeichnet.

$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend.

Die Umkehrfunktionen von $\sin|_{[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]}$, $k \in \mathbb{Z}$, erfüllen nach den Additionstheoremen

$$(\sin|_{[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]})^{-1}(x) = (-1)^k \cdot \arcsin(x) + k\pi.$$

Man nennt sie auch die Nebenzweige der Umkehrfunktion von Sinus.

Definition 4.14. Die Umkehrfunktion von $\cos|_{[0, \pi]}$ heißt *Arcuscosinus* und wird mit \arccos bezeichnet.

$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ ist bijektiv, stetig und streng monoton fallend.

Die Umkehrfunktion von $\cos|_{[k\pi, (k+1)\pi]}$, $k \in \mathbb{Z}$, ist nach den Additionstheoremen

$$(\cos|_{[k\pi, (k+1)\pi]})^{-1}(x) = (-1)^k \cdot \arccos(x) + \frac{2k + 1 - (-1)^k}{2} \cdot \pi.$$

Definition 4.15. Die Umkehrfunktion von $\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ heißt *Arcustangens* und wird mit \arctan bezeichnet.

$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend.

Die Umkehrfunktion von $\tan|_{(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$, erfüllt nach den Additionstheoremen

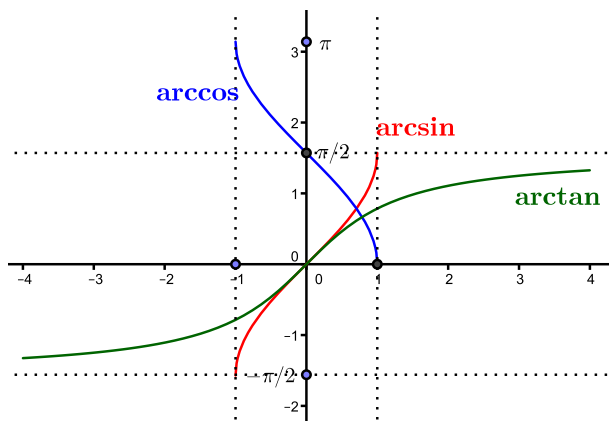
$$(\tan|_{(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)})^{-1}(x) = \arctan(x) + k\pi.$$

Definition 4.16. Die Umkehrfunktion von $\cot|_{(0, \pi)}$ heißt *Arcuscotangens* und wird mit arccot bezeichnet.

$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ ist bijektiv, stetig und streng monoton fallend.

Die Umkehrfunktion von $\cot|_{(k\pi, (k+1)\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$, erfüllt nach den Additionstheoremen

$$(\cot|_{(k\pi, (k+1)\pi)})^{-1}(x) = \operatorname{arccot}(x) + k\pi.$$



4.5.2 Die Hyperbelfunktionen

Unter den Hyperbelfunktionen *Sinus hyperbolicus* $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und *Cosinus hyperbolicus* $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ versteht man die folgenden reellen Funktionen:

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Aus der Reihendarstellung für e^x folgt

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

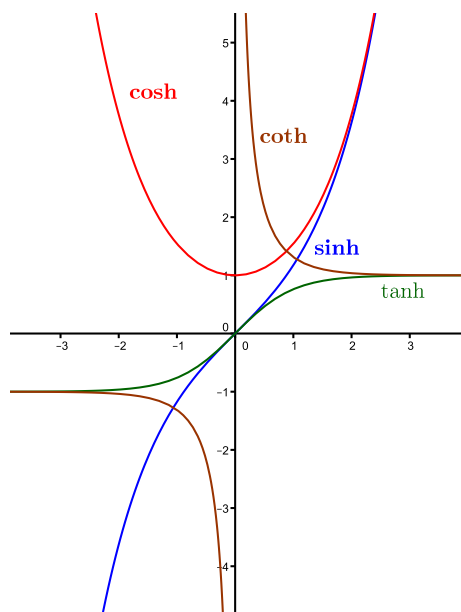
Wir bilden auch hier die Quotienten beider Funktionen und erhalten *Tangens hyperbolicus*

$\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

und *Cotangens hyperbolicus* $\operatorname{coth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\operatorname{coth}(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$



Alle diese Hyperbelfunktionen sind offensichtlich stetig. Durch Einsetzen der Exponentialfunktion in die Definitionen bzw. Betrachtung der Potenzreihen erhält man folgende Rechenregeln und Eigenschaften für die Hyperbelfunktionen:

1. \sinh ist eine bijektive, streng monoton wachsende, ungerade Funktion mit $\sinh(0) = 0$.
2. \cosh ist eine gerade Funktion mit $\cosh(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\cosh|_{[0, +\infty)} : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ ist bijektiv und streng monoton wachsend mit $\cosh(0) = 1$.
3. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$
(Definitionen einsetzen und ausrechnen).
4. *Additionstheoreme:*

$$\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y),$$

$$\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y),$$

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x) \cdot \tanh(y)}.$$

Bemerkung:

a) Der Name *Hyperbelfunktionen* hat folgenden Grund:

So wie die trigonometrischen Funktionen \sin und \cos die Punkte der Kreislinie $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ beschreiben:

$$S^1 = \{(\cos(t), \sin(t)) \mid t \in [0, 2\pi)\},$$

so beschreiben die Hyperbelfunktionen \sinh und \cosh die Punkte der Hyperbel $Hyp := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1, x > 0\}$:

$$Hyp = \{(\cosh(t), \sinh(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Hängt man ein ideales Seil zwischen zwei Punkten über der Erdoberfläche auf, so wird die entstehende *Seilkurve* durch die Funktion $f(x) = b \cosh(ax)$ beschrieben.

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen

Die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv und streng monoton wachsend.

Die Funktion $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt ihre Werte in $[1, +\infty)$ an, sie ist bijektiv und streng monoton wachsend von $[0, +\infty)$ auf $[1, +\infty)$.

Wir können deshalb die Umkehrfunktionen betrachten:

Definition 4.17. Die Umkehrfunktion von $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Arctangens hyperbolicus* und wird mit *arsinh* bezeichnet: $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Umkehrfunktion von $\cosh|_{[0, +\infty)} : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ heißt *Arccosinus hyperbolicus* und wird mit *arcosh* bezeichnet: $\operatorname{arcosh} : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$.

Die Funktion $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ ist bijektiv und streng monoton wachsend. Die Funktion $\operatorname{coth}|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ ist bijektiv und streng monoton fallend.

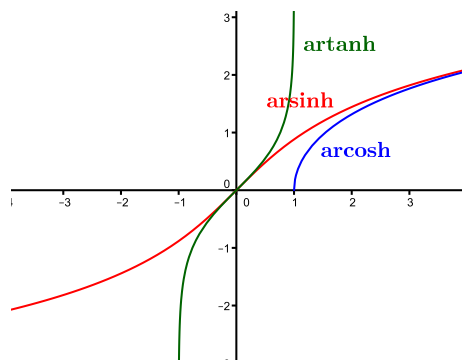
Definition 4.18. Die Umkehrfunktion von \tanh heißt *Areatangens hyperbolicus* :

$$\operatorname{artanh} : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Die Umkehrfunktion von coth heißt *Areacotangens hyperbolicus* :

$$\operatorname{arcoth} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Alle vier Umkehrfunktionen sind wegen Satz 4.4 stetig.



Satz 4.19 Es bestehen die folgenden Beziehungen zwischen den Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen und der Logarithmusfunktion:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{arcosh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), & \forall x \geq 1, \\ \operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), & \forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < 1, \\ \operatorname{arcoth}(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), & \forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| > 1. \end{aligned}$$

Beweis. Übungsaufgabe.

□

Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen

In diesem Kapitel behandeln wir die Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen. Die Ideen zur Entwicklung der Differentialrechnung gehen bis ins 17. Jahrhundert zurück. Sie sind eng verbunden mit dem Versuch, Probleme der Geometrie durch Einsatz analytischer Methoden zu lösen (z.B. Bestimmung von Tangenten oder von Figuren und Körpern mit maximalen Flächeninhalten) sowie mit den Erfordernissen, die die Behandlung von Problemen aus der Mechanik (Verständnis von Geschwindigkeit und Beschleunigung sowie von Kraft und Trägheit) an die Mathematik stellte. Für einen kurzen historischen Abriss empfehle ich das Buch von W.Walter: *Analysis I*, § 10.

Die Grundidee der Differentialrechnung für Funktionen einer reellen Variable ist das Studium des lokalen Änderungsverhaltens der Funktion in der Nähe eines Punktes mit Hilfe der Approximation der Funktion durch lineare Abbildungen (Tangenten) bzw. durch Polynome. Die Eigenschaften dieser linearen bzw. polynomialen Approximation lassen viele Aussagen über das lokale Verhalten der Funktion zu.

Im Abschnitt über stetige Funktionen haben wir reelle und komplexe Funktionen gemeinsam behandelt. Die Definition der Stetigkeit ist in beiden Fällen die gleiche, die grundlegenden Eigenschaften stetiger Funktionen sind auch für beide Fälle analog. Bei differenzierbaren Funktionen ist die Situation grundsätzlich anders: Zwar kann man auch die Differenzierbarkeit für reelle und für komplexe Funktionen auf die gleiche Weise definieren, jedoch haben differenzierbare *komplexe* Funktionen ein grundsätzlich anderes Verhalten als differenzierbare *reelle* Funktionen. Deshalb hat sich ein eigenes Gebiet der Mathematik entwickelt, das sich mit differenzierbaren komplexen Funktionen beschäftigt, die *Funktionentheorie*. Zu diesem Themengebiet werden Vorlesungen im Wahlpflichtbereich des Lehramtsstudiums angeboten. Im Rahmen der Grundvorlesung *Analysis* befassen wir uns zunächst mit den Eigenschaften *reeller* differenzierbarer Funktionen.

5.1 Differenzierbare reelle Funktionen: Rechenregeln und Beispiele

In diesem Kapitel bezeichnet $I \subset \mathbb{R}$ ein reelles Intervall¹.

¹ Hierbei sind alle Sorten von Intervallen zugelassen, die mehr als einen Punkt enthalten, d.h. offene, halb-offene, abgeschlossene, beschränkte und unbeschränkte.

Definition 5.1. Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in I$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

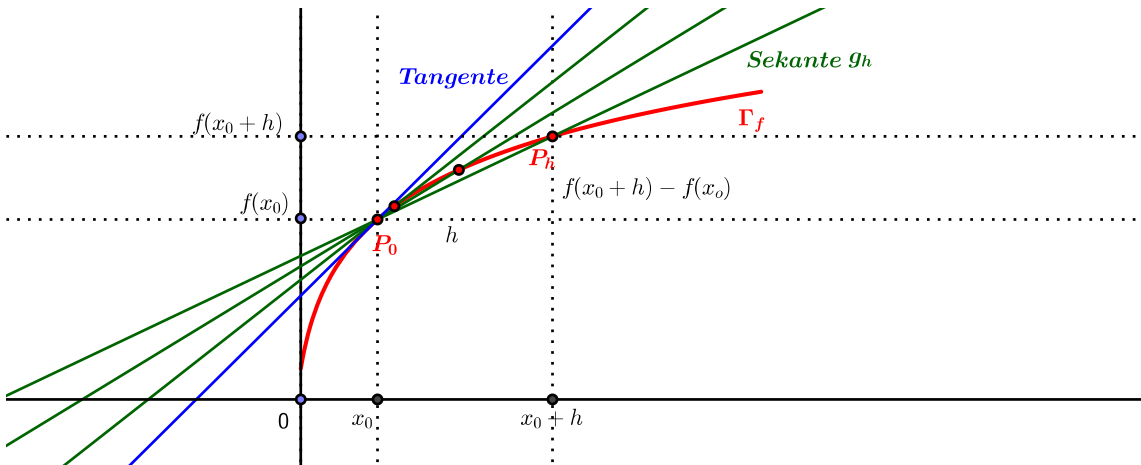
existiert. Dieser Grenzwert heißt Ableitung von f in x_0 .

Die Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, falls sie in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion

$$\begin{aligned} f' : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

1. Ableitung von f .

Geometrische Interpretation der Ableitung:



Sei $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare reelle Funktion. Dann beschreibt der *Differenzenquotient* $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ den Anstieg der Sekante g_h durch die Punkte $P_0 := (x_0, f(x_0))$ und $P_h := (x_0 + h, f(x_0 + h))$ des Funktionsgraphen Γ_f . Die Gerade g_h wird durch die Funktion

$$S_h(x) = \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\text{Anstieg}} \cdot x + c(h)$$

beschrieben (d.h. g_h ist der Graph von S_h). Die Tangente an die Kurve Γ_f im Punkt P_0 ist die Grenzgerade der Sekanten g_h für $h \rightarrow 0$. Ihre Funktionsgleichung lautet daher:

$$\begin{aligned} T_{x_0}(x) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot x + \lim_{h \rightarrow 0} c(h) \\ &= f'(x_0) \cdot x + c(0). \end{aligned}$$

Da die Tangente die Kurve Γ_f im Punkt P_0 berührt, gilt $T_{x_0}(x_0) = f(x_0) = f'(x_0)x_0 + c(0)$. Damit kann man $c(0)$ bestimmen und erhält als Funktionsgleichung für die Tangente

$$T_{x_0}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Folglich beschreibt die Ableitung $f'(x_0)$ den Anstieg der Tangenten an die Kurve Γ_f im Punkt P_0 .

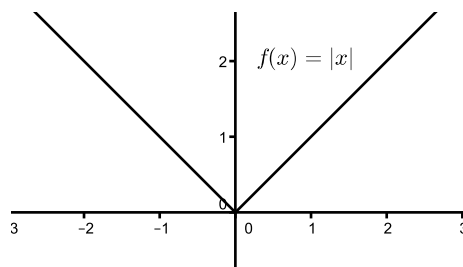
Satz 5.1 *Ist eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar, so ist sie in x_0 auch stetig. Jede differenzierbare Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist somit auf I stetig.*

Beweis. Wir benutzen das Folgenkriterium für die Stetigkeit. Sei (x_n) eine Folge in I , die gegen x_0 konvergiert. OBdA. sei $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$f(x_n) - f(x_0) = (x_n - x_0) \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot f'(x_0) = 0.$$

Somit konvergiert die Bildfolge $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$. Nach dem Folgenkriterium für die Stetigkeit ist f deshalb in x_0 stetig. \square

Bemerkung 1: Es gibt stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind. Z.B. ist die Betragsfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$, in $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.



Es gibt sogar stetige Funktionen, die in keinem Punkt differenzierbar sind².

Satz 5.2 (Ableitungsregeln)

Es seien $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in I$ differenzierbar sind. Dann gilt:

1. **Summenregel:**

$f + g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar und $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

2. **Produktregel:**

$f \cdot g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar und

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

3. **Quotientenregel:**

g habe auf I keine Nullstelle. Dann ist $\frac{f}{g} : I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

² Ein Beispiel können Sie sich im Buch von K. Königsberger: Analysis 1, 6. Auflage, Kapitel 9.11, oder im Buch von O. Deiser: Analysis 1, S. 283, ansehen (Takagi-Funktion).

Insbesondere gilt auch

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Beweis. 1. Die Behauptung folgt durch Limesbildung aus

$$\frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

2. Die Behauptung folgt auch hier wieder durch Limesbildung aus

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = f(x) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0),$$

wobei wir auch die Stetigkeit von f in x_0 benutzen.

3. Die letztere Behauptung folgt durch Limesbildung aus

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -g'(x_0) \cdot \frac{1}{g^2(x_0)}.$$

Mit Hilfe der Produktregel erhält man dann sofort die Quotientenregel. \square

Satz 5.3 (Kettenregel)

Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, die Funktion $g : J \rightarrow I$ in $x_0 \in J$ differenzierbar und die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in $g(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die Verknüpfung $f \circ g : J \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Beweis. Für $g(x) \neq g(x_0)$ gilt

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}. \quad (*)$$

Sei (x_n) eine gegen x_0 konvergente Folge mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. *Fall:* Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $g(x_n) \neq g(x_0)$ für alle $n \geq n_0$. Da g in x_0 stetig ist, konvergiert die Folge $(g(x_n))$ gegen $g(x_0)$ und aus (*) folgt wegen der Differenzierbarkeit von g in x_0 und f in $g(x_0)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(g(x_n)) - f(g(x_0))}{x_n - x_0} = g'(x_0) \cdot f'(g(x_0)).$$

2. *Fall:* Es gelte $g(x_n) = g(x_0)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Teilfolge (x_{n_k}) dieser Folgenglieder von (x_n) . Da g in x_0 differenzierbar ist, gilt dann

$$g'(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(x_{n_k}) - g(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = 0.$$

Demnach ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(g(x_{n_k})) - f(g(x_0))}{x_{n_k} - x_0} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0 = g'(x_0) \cdot f'(g(x_0)).$$

Unter Benutzung des 1. Falles erhalten wir die erforderliche Konvergenz für die gesamte Folge (x_n) . \square

Satz 5.4 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $f : I \rightarrow J$ eine bijektive Funktion zwischen zwei Intervallen, $x_0 \in I$ und es gelte:

- a) Die Funktion f ist in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$,
 b) Die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \rightarrow I$ ist in $y_0 := f(x_0) \in J$ stetig.

Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \rightarrow I$ in y_0 differenzierbar und für ihre Ableitung gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Für $y \in J$ mit $y_0 \neq y$ und $x := f^{-1}(y) \in I$ gilt:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}. \quad (**)$$

Sei nun (y_n) eine Folge in J mit $y_n \neq y_0$, die gegen y_0 konvergiert. Da f^{-1} in y_0 stetig ist, konvergiert die Folge $(x_n := f^{-1}(y_n))$ gegen $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Da f in x_0 differenzierbar ist, folgt dann mit (**)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

□

Bemerkung 2: Da jede differenzierbare Funktion auch stetig ist, ist die Voraussetzung b) in Satz 5.4 notwendig. Ist f in x_0 differenzierbar, so ist die Voraussetzung $f'(x_0) \neq 0$ in a) ebenfalls notwendig. Sind nämlich f in x_0 und f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, so gilt wegen $f^{-1} \circ f = \text{Id}_I$ nach Kettenregel:

$$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1,$$

und somit $f'(x_0) \neq 0$.

Die letzte Bedingung ist für die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ verletzt. f ist bijektiv und differenzierbar, es gilt $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$. Die inverse Funktion $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f^{-1}(y) := \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{falls } y > 0, \\ 0 & \text{falls } y = 0, \\ -\sqrt[3]{|y|} & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

f^{-1} ist in 0 stetig, aber nicht differenzierbar. Z.B. existiert bereits der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten von f^{-1} für y gegen 0^+ nicht in \mathbb{R} , da

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(0)}{y} = \frac{\sqrt[3]{y}}{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} +\infty.$$

Dieses Beispiel zeigt auch, dass die Umkehrfunktion einer nicht differenzierbaren Funktion durchaus differenzierbar sein kann.

Ableitungen elementarer Funktionen

1. Polynome

Seien a_0, a_1, \dots, a_n reelle Zahlen und $P(x)$ das Polynom

$P(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Dann ist die Funktion $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und für die Ableitung gilt:

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1.$$

Beweis. Wegen der Summen- und Produktregel für Ableitungen genügt es, die Polynome der Form $P(x) := x^k$ für $k \in \mathbb{N}$ zu betrachten. Für den Differenzenquotienten gilt:

$$\begin{aligned} \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0} &= \frac{(x - x_0)(x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + x^{k-3}x_0^2 + \dots + x \cdot x_0^{k-2} + x_0^{k-1})}{x - x_0} \\ &= x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + x^{k-3}x_0^2 + \dots + x \cdot x_0^{k-2} + x_0^{k-1}. \end{aligned}$$

Für $x \rightarrow x_0$ konvergiert dies gegen $k \cdot x_0^{k-1}$. □

2. Die Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\exp(x) := e^x$, ist differenzierbar und es gilt $\exp' = \exp$.

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotienten $\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}$. Nach Übungsaufgabe 32 gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Folglich ist \exp differenzierbar und für die Ableitung im Punkt $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x = \exp(x). \quad \square$$

3. Die Logarithmusfunktion

$\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

Beweis. Die Logarithmusfunktion \ln ist die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Sie ist stetig, die Exponentialfunktion \exp ist differenzierbar mit $\exp' = \exp > 0$. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes 5.4 erfüllt und es folgt für alle $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}. \quad \square$$

4. Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen

Sei $a \in \mathbb{R}$ eine fixierte reelle Zahl. Wir betrachten die Potenzfunktion $p_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit dem Exponenten a :

$$p_a(x) := x^a = e^{\ln(x) \cdot a}.$$

p_a ist differenzierbar und es gilt $p_a'(x) = a \cdot x^{a-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

(Der Spezialfall $a = \frac{1}{m}$ für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, liefert die Wurzelfunktionen).

Beweis. Nach der Kettenregel (Satz 5.3) gilt:

$$p'_a(x) = \exp'(\ln(x) \cdot a) \cdot a \cdot \ln'(x) = e^{\ln(x) \cdot a} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^a}{x} \cdot a = a \cdot x^{a-1}.$$

□

5. Die trigonometrischen Funktionen

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind differenzierbar und es gilt $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$.

Beweis. Aus Übungsaufgabe 36 wissen wir, dass $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$. Aus den Additionstheoremen folgt daher für die Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} + \sin(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \cos(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} -\sin(x). \end{aligned}$$

□

6. Die Hyperbelfunktionen

$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind differenzierbar und es gilt $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$.

Beweis. Nach Definition gilt $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned} (\sinh)'(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x), \\ (\cosh)'(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x). \end{aligned}$$

□

7. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

$\arcsin|_{(-1,1)}$, $\arccos|_{(-1,1)}$, \arctan und arccot sind differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \arccos'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } x \in (-1, 1), \\ \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, & \operatorname{arccot}'(x) &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen beispielhaft die Formel für \arctan :

Die Funktion $\tan := \frac{\sin}{\cos} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist nach Quotientenregel differenzierbar und es gilt

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) > 0.$$

Die Funktion \arctan ist stetig. Wir können also Satz 5.4 anwenden und erhalten

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + y^2}. \quad \square$$

Die höheren Ableitungen einer Funktion

Wir definieren die höheren Ableitungen induktiv:

Definition 5.2. Sei $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ ihre Ableitung. Ist f' in $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt

$$f''(x_0) := f^{(2)}(x_0) := \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) := (f')'(x_0)$$

die 2. Ableitung von f in x_0 . Ist f' in jedem Punkt von I differenzierbar, so heißt f 2-mal differenzierbar und die Funktion

$$\begin{aligned} f'' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f''(x) \end{aligned}$$

die 2. Ableitung von f .

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) und $f^{(n)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ihre n -te Ableitung. Ist $f^{(n)}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar, so nennt man

$$f^{(n+1)}(x_0) := \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(x_0) := (f^{(n)})'(x_0)$$

die $(n+1)$ -te Ableitung von f in x_0 . Ist $f^{(n)}$ in jedem Punkt von I differenzierbar, so heißt f $(n+1)$ -mal differenzierbar und die Funktion

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

die $(n+1)$ -te Ableitung von f .

Definition 5.3. Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar und $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt n -mal stetig differenzierbar, falls alle Ableitungen $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ existieren und stetig sind.

Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt glatt, wenn sie beliebig oft differenzierbar ist, das heißt, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ableitungen $f^{(n)}$ existieren (und somit stetig sind).

Bezeichnungen:

$C^0(I, \mathbb{R}) :=$ Vektorraum aller stetigen Funktionen von I nach \mathbb{R}

$C^k(I, \mathbb{R}) :=$ Vektorraum aller k -fach stetig differenzierbaren Funktionen von I nach \mathbb{R} ,
 $k \in \mathbb{N}$.

$C^\infty(I, \mathbb{R}) :=$ Vektorraum aller glatten Funktionen von I nach \mathbb{R} .

Beispiel: Eine differenzierbare, aber nicht stetig differenzierbare Funktion.

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Diese Funktion f ist differenzierbar, aber f' ist in 0 nicht stetig. Um dies einzusehen, betrachten wir zunächst $x \neq 0$. Dann ist

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für den Differenzenquotienten von f in $x = 0$ gilt

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = h \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{\text{beschränkt}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

somit ist $f'(0) = 0$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist also differenzierbar. Da $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \rightarrow 0$ keinen Grenzwert hat, hat auch f' keinen Grenzwert in $x = 0$. Somit ist die Ableitung f' in $x = 0$ nicht stetig. Insbesondere ist f auch nicht 2-mal differenzierbar in $x = 0$.

5.2 Die Mittelwertsätze der Differentialrechnung und Anwendungen

In diesem Abschnitt werden wir die Mittelwertsätze der Differentialrechnung für reellwertige differenzierbare Funktionen $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beweisen und mit ihrer Hilfe Aussagen über den Kurvenverlauf des durch f definierten Funktionsgraphen

$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ machen.

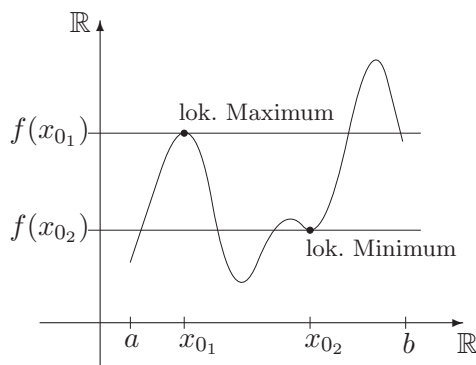
Definition 5.4. Sei $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Man sagt: f nimmt in $x_0 \in I$ ein lokales Maximum (bzw. lokales Minimum) an, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(y) \leq f(x_0) \quad (\text{bzw. } f(y) \geq f(x_0)) \quad \text{für alle } y \in I \text{ mit } |y - x_0| < \varepsilon. \quad (*)$$

b) Falls Gleichheit in (*) nur für $x = x_0$ eintritt, so heißt das lokale Maximum (Minimum) isoliert (oder strikt).

c) Ein lokales Maximum oder Minimum nennt man auch lokales Extremum.



Satz 5.5 Sei $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Hat f in $x_0 \in (a, b) \subset I$ ein lokales Maximum oder lokales Minimum und ist f in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Sei $f(x_0)$ ein lokales Maximum von f . Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &\leq 0 && \text{für alle } x > x_0 \text{ mit } |x-x_0| < \varepsilon && \text{und} \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &\geq 0 && \text{für alle } x < x_0 \text{ mit } |x-x_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Für die einseitigen Grenzwerte folgt daraus:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \quad (\star)$$

Da der Grenzwert $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nach Voraussetzung existiert, muss gelten

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Aus (\star) folgt dann $f'(x_0) = 0$. □

Aus $f'(x_0) = 0$ folgt im Allgemeinen nicht, dass f in x_0 ein lokales Maximum oder Minimum hat. Wir betrachten zum Beispiel $f(x) = x^3$. Dann ist $f'(0) = 0$, aber 0 ist kein lokaler Extremwert von f . Zu beachten ist außerdem, dass die Aussage von Satz 5.5 nicht für die Randpunkte des Definitionsbereiches I von f gilt.

Satz 5.6 (Satz von Rolle) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Weiterhin gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Ist f konstant auf $[a, b]$, so ist die Behauptung trivial. Ist f nicht konstant, so existiert ein $x_1 \in (a, b)$, so dass

$$f(x_1) > f(a) = f(b) \quad \text{oder} \quad f(x_1) < f(a) = f(b).$$

Sei $f(x_1) > f(a) = f(b)$. Da $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $[a, b]$ kompakt ist, nimmt f auf $[a, b]$ ein globales Maximum in einem Punkt $x_0 \in [a, b]$ an. Das Maximum wird wegen obiger Annahme nicht auf den Randpunkten von $[a, b]$ angenommen, d.h. $x_0 \in (a, b)$. Aus Satz 5.5 folgt dann $f'(x_0) = 0$. Der Beweis für den Fall $f(x_1) < f(a) = f(b)$ verläuft analog mit Hilfe des globalen Minimums. □

Satz 5.7 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz von Cauchy)

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(\xi) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(\xi). \quad (*)$$

Ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so gilt auch $g(a) \neq g(b)$, d.h. $(*)$ ist äquivalent zu

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis. Die 2. Behauptung folgt aus dem Satz von Rolle. Zum Beweis der ersten Behauptung betrachten wir die Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) := (f(b) - f(a)) \cdot g(x) - (g(b) - g(a)) \cdot f(x), \quad x \in [a, b].$$

Dann ist φ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) und es gilt

$$\varphi(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = \varphi(b).$$

Nach dem Satz von Rolle existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $\varphi'(\xi) = 0$. Wir erhalten somit

$$0 = \varphi'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi). \quad \square$$

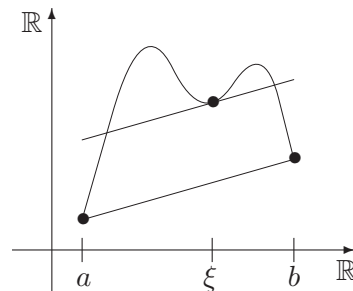
Satz 5.8 (Mittelwertsatz von Lagrange)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Beweis. Folgt aus Satz 5.7 mit $g(x) := x$. \square

Geometrisch besagt dieser Mittelwertsatz, dass ein $\xi \in (a, b)$ existiert, so dass der Anstieg der Tangente in $(\xi, f(\xi))$ gleich dem Anstieg der Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.



Als erste Anwendung des Mittelwertsatzes erhalten wir

Satz 5.9 Jede differenzierbare Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit beschränkter Ableitung ist lipschitzstetig. Insbesondere ist jede stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig.

Beweis. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Dann existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}^+$ mit $|f'(x)| \leq C$ für alle $x \in I$. Seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz 5.8, dass ein $\xi \in (x_1, x_2)$ existiert, so dass

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)| \cdot |x_2 - x_1| \leq C \cdot |x_2 - x_1|.$$

Dies aber bedeutet, dass f lipschitzstetig mit der Lipschitz-Konstanten C ist. Sei nun $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist f' stetig. Da $[a, b]$ kompakt ist, nimmt f' auf $[a, b]$ ein Maximum an, d.h. f' ist beschränkt. \square

Wir werden den Mittelwertsatz von Lagrange jetzt anwenden, um Aussagen über den Kurvenverlauf des durch $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definierten Graphen $\Gamma = \Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$ zu machen.

Satz 5.10 Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion³. Dann gilt:

1. Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f monoton wachsend.
2. Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton wachsend.
3. Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f monoton fallend.
4. Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton fallend.
5. Ist $f' \equiv 0$ auf (a, b) , so ist f konstant.

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in (a, b)$ und $x_1 < x_2$. Wir wenden den Mittelwertsatz von Lagrange auf $f|_{[x_1, x_2]}$ an. Nach diesem Satz existiert ein $\xi \in (x_1, x_2)$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Da $x_2 - x_1 > 0$, folgen die Behauptungen. □

Satz 5.11 Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die in $x_0 \in (a, b)$ zweimal differenzierbar ist. Es gelte

1. $f'(x_0) = 0$ und
2. $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f''(x_0) > 0$).

Dann hat f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum (bzw. Minimum).

Beweis. Wir beweisen nur den Fall $f''(x_0) < 0$. Der Beweis für $f''(x_0) > 0$ verläuft analog. Aus

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$$

folgt, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$$

für alle $x \in (a, b)$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$. Da $f'(x_0) = 0$, erhält man

$$\begin{aligned} f'(x) < 0, & \quad \text{für alle } x > x_0 \text{ mit } x - x_0 < \delta & \quad \text{und} \\ f'(x) > 0, & \quad \text{für alle } x < x_0 \text{ mit } x_0 - x < \delta. \end{aligned}$$

Nach Satz 5.10 ist daher $f|_{(x_0 - \delta, x_0)}$ streng monoton wachsend, während $f|_{(x_0, x_0 + \delta)}$ streng monoton fallend ist. Somit hat f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum. □

Definition 5.5. Eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- konvex, falls für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

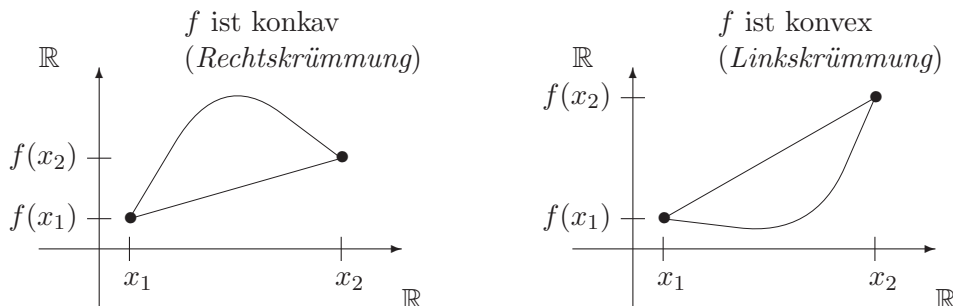
$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

³ Sofern nichts anderes gesagt wird, lassen wir im Folgenden bei offenen Intervallen (a, b) auch $a, b \in \{\pm\infty\}$ zu.

- *konkav, falls für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt:*

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Ist f konvex, so liegt der Graph von f , $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in (a, b)\} \subset \mathbb{R}^2$, für beliebige $x_1, x_2 \in (a, b)$ unterhalb der Geraden durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$. Ist f konkav, so liegt der Graph Γ_f für beliebige $x_1, x_2 \in (a, b)$ oberhalb der Geraden durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$.



Satz 5.12 Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

1. f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.
2. f ist genau dann konkav, wenn $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Beweis. Wir zeigen nur die erste Behauptung. Der Beweis der zweiten Behauptung wird analog geführt.

(\Leftarrow) Sei $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Nach Satz 5.10 ist f' auf (a, b) monoton wachsend. Seien $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ und $\lambda \in (0, 1)$. Wir setzen $x := \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Dann ist $x_1 < x < x_2$. Nach dem Mittelwertsatz existieren ein $\xi_1 \in (x_1, x)$ und ein $\xi_2 \in (x, x_2)$, so dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Da $x - x_1 = (1 - \lambda)(x_2 - x_1)$ und $x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$, erhalten wir

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1 - \lambda} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda}.$$

Daraus folgt

$$f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Somit ist f konvex.

(\Rightarrow) Sei f konvex. Wir nehmen an, dass ein $x_0 \in (a, b)$ existiert mit $f''(x_0) < 0$. Sei $c := f'(x_0)$ und $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $\varphi(x) := f(x) - c(x - x_0)$. Dann ist φ zweimal differenzierbar und es gilt $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) < 0$. Nach Satz 5.11 hat φ daher in x_0 ein isoliertes lokales Maximum, das heißt, es existiert ein $h > 0$ mit $[x_0 - h, x_0 + h] \subset (a, b)$, so dass $\varphi(x_0 - h) < \varphi(x_0)$ und $\varphi(x_0 + h) < \varphi(x_0)$. Deshalb gilt

$$f(x_0) = \varphi(x_0) > \frac{1}{2}(\varphi(x_0 - h) + \varphi(x_0 + h)) = \frac{1}{2}(f(x_0 - h) + f(x_0 + h)).$$

Mit $\lambda = \frac{1}{2}$, $x_1 = x_0 - h$ und $x_2 = x_0 + h$ folgt, dass f nicht konvex ist.

Definition 5.6. Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der Punkt $x_0 \in (a, b)$ heißt Wendepunkt von f , wenn ein Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$ existiert, so dass entweder $f|_{(x_0 - \varepsilon, x_0)}$ konkav und $f|_{(x_0, x_0 + \varepsilon)}$ konvex ist oder Umgekehrtes gilt.

Satz 5.13 Sei $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Ist $x_0 \in (a, b)$ ein Wendepunkt von f , so gilt $f''(x_0) = 0$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 5.12. □

Abschließend beweisen wir mit Hilfe des verallgemeinerten Mittelwertsatzes von Cauchy die *Regeln von L'Hospital*. Diese Regeln liefern ein einfaches Verfahren, Grenzwerte von Brüchen zweier Funktionen zu bestimmen, wenn bei Limesbildung Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ auftreten.

Satz 5.14 (Die Regeln von L'Hospital)

Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

- a) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) \in \{0, \pm\infty\}$,
- b) $g'(x) \neq 0$ für alle und $x \in (a, b)$,
- c) Es existiert $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Dann existiert auch $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und es gilt $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$. Entsprechendes gilt für $x \rightarrow b^-$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für den Fall $x \rightarrow a^+ \in \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Die Behauptung für $x \rightarrow b^-$ mit $b \in \mathbb{R}$ wird analog geführt. Die Aussage für $x \rightarrow +\infty$ erhält man durch Substitution $x := \frac{1}{y}$ aus der Aussage für $y \rightarrow 0^+$. die Aussage für $x \rightarrow -\infty$ durch Substitution aus derjenigen für $y \rightarrow 0^-$.

1. Fall: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$.

Wir setzen f und g in a durch $f(a) := g(a) := 0$ fort. Dann sind $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz (Satz 5.7) gibt es zu jedem $x \in (a, b)$ ein $\xi(x) \in (a, x)$, so dass

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}.$$

$x \rightarrow a^+$ impliziert $\xi(x) \rightarrow a^+$, woraus sich die Behauptung ergibt.

2. Fall: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R}$.

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $\delta > 0$, so dass

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } t \in (a, a + \delta).$$

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gilt dann für beliebige Punkte $x, y \in (a, a + \delta)$ mit $x \neq y$:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - c \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Durch Ausmultiplizieren prüft man folgende Formel nach:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}. \quad (*)$$

Da $f(x)$ und $g(x)$ für $x \rightarrow a^+$ gegen $+\infty$ streben, konvergiert der 2. Faktor auf der rechten Seite von (*) für $x \rightarrow a^+$ gegen 1. Insbesondere gibt es ein $\delta^* > 0$, so dass für alle $x \in (a, a + \delta^*)$ gilt:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $x \in (a, a + \min\{\delta, \delta^*\})$ ergibt sich mit der Dreiecks-Ungleichung:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right| + \left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - c \right| < \varepsilon.$$

Dies zeigt die Behauptung im 2. Fall.

3. Fall: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$.

Dann gilt $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ und aus dem 2. Fall folgt sofort $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$. Nach Voraussetzung sind f und g in einer Umgebung von a positiv. Folglich gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

4. Fall: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

Dieser Fall kann nicht auftreten, da sonst f oder g in einer Umgebung von a monoton fallend wären und somit nicht gegen $+\infty$ konvergieren würden. \square

Mit Hilfe der Regeln von L'Hospital können wir Grenzwerte von Funktionen und damit auch von Folgen in vielen Fällen leichter ausrechnen, als es mit den Methoden der vorigen Kapitel möglich war.

Beispiele:

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x) \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}} \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

2. Für jede positive reelle Zahl α gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \cdot \alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha - [\alpha] - 1) \cdot x^{\alpha - ([\alpha] + 1)}} = +\infty, \end{aligned}$$

wobei $[\alpha]$ die größte ganze Zahl k mit $k \leq \alpha$ bezeichnet.

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln(x) \cdot \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}} = e^0 = 1.$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e.$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1.$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(\cos x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\cos x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)} = e^0 = 1.$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1.$

5.3 Differenzierbarkeit von Potenzreihen

Jedes reelle Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k$ ist differenzierbar mit der Ableitung

$P'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k(x-x_0)^{k-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir verallgemeinern dies jetzt auf Potenzreihen.

Satz 5.15 Sei $P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine reelle⁴ Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion $P : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

differenzierbar und für die Ableitung $P' : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}.$$

Beweis. Wir betrachten die Potenzreihe $Q(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^{k-1}$.

1. Zunächst überlegen wir uns, dass der Konvergenzradius R_Q von $Q(x)$ ebenfalls R ist: $Q(x)$ hat den gleichen Konvergenzradius wie die Potenzreihe $\hat{Q}(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-x_0)^k$.

Da $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k a_k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$, stimmen die Konvergenzradien von $\hat{Q}(x)$ und $P(x)$ überein (siehe Satz 3.28). Also gilt $R_Q = R$.

2. Wir zeigen nun, dass P differenzierbar ist mit $P'(x) = Q(x)$ für alle $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Wir setzen $p_k(x) := a_k(x-x_0)^k$. Dann gilt $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)$ und $Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p'_k(x)$.

Sei $\xi \in I_R(x_0) := (x_0 - R, x_0 + R)$ fixiert und $\varepsilon > 0$, so dass $J_\varepsilon(\xi) := [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon] \subset I_R(x_0)$.

Die Polynome p_k sind auf $J_\varepsilon(\xi)$ stetig differenzierbar, also lipschitzstetig (siehe Satz 5.9), d.h. es gilt für alle $x \in J_\varepsilon(\xi)$:

$$\frac{|p_k(x) - p_k(\xi)|}{|x - \xi|} \leq L_k := \max \{ |p'_k(y)| \mid y \in J_\varepsilon(\xi) \} =: |p'_k(\eta)|,$$

⁴ d.h. $x_0 \in \mathbb{R}, a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$.

wobei $\eta \in J_\varepsilon(\xi)$. Da $Q(x)$ auf $I_R(x_0)$ absolut konvergent ist, konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |p'_k(\eta)| = \sum_{k=0}^{\infty} L_k$ und es gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} p'_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |p'_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} L_k < \infty \quad \forall x \in J_\varepsilon(\xi).$$

Folglich existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} L_k < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |p'_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in J_\varepsilon(\xi).$$

Wir können jetzt den Differenzenquotienten für P abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{P(x) - P(\xi)}{x - \xi} - Q(\xi) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p_k(x) - p_k(\xi)}{x - \xi} - p'_k(\xi) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n_0} \left| \frac{p_k(x) - p_k(\xi)}{x - \xi} - p'_k(\xi) \right| + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} L_k + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |p'_k(\xi)|. \end{aligned}$$

Die letzten beiden Summanden sind jeweils kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$. Da $p'_k(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{p_k(x) - p_k(\xi)}{x - \xi}$, existiert ein $\delta > 0$, so dass der 1. Summand ebenfalls kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ ist für alle $x \in I_\delta(\xi)$.

Folglich gilt

$$\left| \frac{P(x) - P(\xi)}{x - \xi} - Q(\xi) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in I_\delta(\xi)$$

und somit $Q(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{P(x) - P(\xi)}{x - \xi} = P'(\xi)$. Da ξ beliebig war, folgt $P' = Q$. \square

Insbesondere folgt aus dem letzten Satz, dass jede Potenzreihe auf ihrem Konvergenzintervall auch stetig ist:

Folgerung 5.1 Sei $P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ eine reelle Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die durch die Potenzreihe definierte Funktion

$P : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. \square

Für reelle Potenzreihen können wir eine zusätzliche Feststellung über das Verhalten der Potenzreihe in den Randpunkten des Konvergenzintervalls machen.

Satz 5.16 (Abelscher Grenzwertsatz)

Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ eine reelle Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $R > 0$.

1. Ist $P(x_0 + R)$ konvergent, so ist $P|_{(x_0 - R, x_0 + R]}$ in $x_0 + R$ stetig, d.h. es gilt

$$\lim_{x \rightarrow (x_0 + R)^-} P(x) = P(x_0 + R) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k.$$

2. Ist $P(x_0 - R)$ konvergent, so ist $P|_{[x_0 - R, x_0 + R)}$ in $x_0 - R$ stetig, d.h. es gilt

$$\lim_{x \rightarrow (x_0 - R)^+} P(x) = P(x_0 - R) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k R^k.$$

Beweis. Wir beweisen die erste Behauptung⁵. Der Beweis der zweiten Behauptung erfolgt analog. Nach Voraussetzung konvergiert die Folge der Partialsummen $s_m = \sum_{k=0}^m a_k R^k$ gegen $s = P(x_0 + R)$. Wir müssen zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|P(x) - s| < \varepsilon$ für alle $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ mit $x_0 + R - x < \delta$.

Wir setzen $y := x - x_0$. Aus den Eigenschaften der geometrischen Reihe und dem Cauchy-Produkt von Reihen folgt für alle y mit $|y| < R$:

$$\begin{aligned} P(y + x_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k \\ &= \left(1 - \frac{y}{R}\right) \left(1 - \frac{y}{R}\right)^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k \\ &= \left(1 - \frac{y}{R}\right) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y}{R}\right)^k}_{\text{abs. konv.}} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k}_{\text{abs. konv.}} \\ &= \left(1 - \frac{y}{R}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\ell=0}^m \left(\frac{y}{R}\right)^{\ell} a_{m-\ell} y^{m-\ell} \right\} \\ &= \left(1 - \frac{y}{R}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{y}{R}\right)^m \cdot s_m \right\}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$s = \left(1 - \frac{y}{R}\right) \left(1 - \frac{y}{R}\right)^{-1} \cdot s = \left(1 - \frac{y}{R}\right) \sum_{m=0}^{\infty} s \cdot \left(\frac{y}{R}\right)^m.$$

Folglich ist für $|y| < R$

$$P(y + x_0) - s = \left(1 - \frac{y}{R}\right) \sum_{m=0}^{\infty} (s_m - s) \left(\frac{y}{R}\right)^m.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Da (s_m) gegen s konvergiert, existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|s_m - s| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m \geq m_0.$$

Wir setzen $M := \sum_{m=0}^{m_0-1} |s_m - s|$ und $\delta := \min\{R, \frac{\varepsilon R}{2M}\}$. Für $|y| < R$ mit $R - y < \delta$ gilt

$$0 < 1 - \frac{y}{R} < \frac{\delta}{R}.$$

Wegen $\delta \leq R$ gilt außerdem $y > 0$. Daraus folgt

⁵ Den Beweis dieses Satzes haben wir in der Vorlesung nicht geführt.

$$\begin{aligned}
|P(y+x_0) - s| &\leq \left(1 - \frac{y}{R}\right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{m_0-1} |s_m - s| \cdot \left(\frac{y}{R}\right)^m + \sum_{m=m_0}^{\infty} |s_m - s| \cdot \left(\frac{y}{R}\right)^m\right) \\
&< \frac{\delta}{R} \cdot \sum_{m=0}^{m_0-1} |s_m - s| + \left(1 - \frac{y}{R}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=m_0}^{\infty} \left(\frac{y}{R}\right)^m \\
&\leq \frac{\delta}{R} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit ist die Funktion P im Punkt $x_0 + R$ stetig. \square

Für Potenzreihen gilt sogar mehr. Sie sind immer unendlich oft differenzierbar.

Satz 5.17 Sei $P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine reelle Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die Funktion $P : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt $a_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$, d.h. :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

Beweis. Nach Satz 5.15 ist P auf dem Konvergenzintervall $I_R(x_0) := (x_0 - R, x_0 + R)$ differenzierbar und es gilt

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-x_0)^{k-1} \quad \forall x \in I_R(x_0).$$

P und P' haben den gleichen Konvergenzradius. Wir können deshalb P' erneut ableiten und erhalten P'' mit

$$P''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2} \quad \forall x \in I_R(x_0).$$

Induktiv erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$: P ist n -mal differenzierbar und für die n -te Ableitung gilt:

$$P^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-(n-1)) a_k (x-x_0)^{k-n} \quad \forall x \in I_R(x_0).$$

Für das Zentrum x_0 der Potenzreihe folgt $P^{(n)}(x_0) = n! a_n$, also $a_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. \square

Folgerung 5.2 (Identitätssatz für Potenzreihen)

Es seien $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ und $Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ zwei reelle Potenzreihen mit dem gleichen Zentrum x_0 und positivem Konvergenzradius R_P bzw. R_Q .

Gibt es kleines offenes Intervall $I_\varepsilon(x_0) \subset I_{R_P}(x_0) \cap I_{R_Q}(x_0)$ um x_0 , auf dem die Funktionen P und Q übereinstimmen, dann gilt $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, d.h. $P = Q$. \square

Anwendung: Berechnung von π .

Als Anwendung berechnen wir die Zahl π . Dazu betrachten wir die Funktion

$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Wegen $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ ist $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Wir zeigen nun, dass man die Funktion \arctan auf $[-1, 1]$ als eine Potenzreihe darstellen kann.

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für alle } |x| \leq 1.$$

Beweis. Die Funktion \arctan ist differenzierbar und es gilt $\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Aus den Eigenschaften der geometrischen Reihe erhält man andererseits $\sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in (-1, 1)$. Folglich gilt $\arctan'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$ für alle $x \in (-1, 1)$.

Wir betrachten die Potenzreihe

$$Q(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Der Konvergenzradius von Q ist 1 und es gilt

$$Q'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

Folglich ist $\arctan'(x) = Q'(x)$ für alle $x \in (-1, 1)$. Da $Q(0) = \arctan(0) = 0$, erhalten wir $\arctan(x) = Q(x)$ für alle $x \in (-1, 1)$ und somit

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für alle } |x| < 1.$$

Es bleibt, die Randpunkte $x = \pm 1$ des Konvergenzintervalls zu untersuchen. Nach dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen ist die Reihe $Q(1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$ konvergent. Außerdem gilt $Q(-1) = -Q(1)$. Nach dem Abelschen Grenzwertsatz 5.16 ist damit Q in $x = \pm 1$ stetig und

$$Q(\pm 1) = \lim_{x \rightarrow \pm 1^{\mp}} Q(x) = \lim_{x \rightarrow \pm 1^{\mp}} \arctan(x) = \arctan(\pm 1).$$

Wir erhalten zusammenfassend

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{für alle } |x| \leq 1.$$

□

Da $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$, gilt für π die *Leibnizformel*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}.$$

Diese Reihe konvergiert sehr langsam gegen $\frac{\pi}{4}$. Man benötigt etwa 1000 Summanden, um π auf 3 Stellen genau zu erhalten. Wesentlich schneller konvergente Reihen mit dem Grenzwert $\frac{\pi}{4}$ erhält man durch den folgenden Trick:

Durch Umkehrung der Additionstheoreme folgt für $x \cdot y \neq 1$

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-x \cdot y}\right).$$

Wir setzen in diese Gleichung spezielle Werte für x und y ein und erhalten:

$$\begin{aligned} 2 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) &= \arctan\left(\frac{5}{12}\right) & (x = y = \frac{1}{5}), \\ 2 \arctan\left(\frac{5}{12}\right) &= \arctan\left(\frac{120}{119}\right) & (x = y = \frac{5}{12}), \\ \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right) &= \arctan\left(\frac{120}{119}\right) & (x = 1, y = \frac{1}{239}). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 4 \cdot \arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \quad (*)$$

$$= 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1}. \quad (**)$$

Die Formel (*) findet man auch unter dem Namen *Machinsche Formel*. Der englische Astronom John Machin (1680-1751) hat diese Formel 1706 gefunden und mit ihrer Hilfe die ersten 100 Nachkommastellen von π berechnet.

Ist $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ eine alternierende Reihe mit monoton fallender Nullfolge positiver reeller Zahlen (a_k) , so kann man den Fehler bei der Näherungsrechnung nach Satz 3.23 folgendermaßen abschätzen:

$$\left| s - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}.$$

Für den Fehler F_1 bei Addition von 8 Reihengliedern der ersten Reihe in (**) gilt

$$F_1 \leq \underbrace{\frac{4}{17} \cdot \frac{1}{5^{17}}}_{=a_8} < 4 \cdot 10^{-13}.$$

Für den Fehler F_2 bei Addition von 2 Reihengliedern der zweiten Reihe in (**) gilt

$$F_2 \leq \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{239^5}}_{a_2} < 3 \cdot 10^{-13}.$$

Wir erhalten also bereits durch die Addition sehr weniger Reihenglieder in (**) eine sehr gute Näherung von π , die weniger als $3 \cdot 10^{-12}$ vom wahren Wert abweicht. Die Addition dieser ersten Reihenglieder ergibt z.B. für die ersten 10 Nachkommastellen von π :

$$\pi = 3.1415926535 + Rest, \quad |Rest| < 10^{-11}.$$

5.4 Taylorpolynome und Extremwertprobleme

Für eine in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ existiert die Tangente an den Graphen Γ_f von f im Punkt $P_0 = (x_0, f(x_0))$. Sie wird durch die Funktionsgleichung

$$T_1(f, x_0)(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R},$$

beschrieben. Die Funktion $T_1(f, x_0)$ kann man als lineare Approximation von f in der Nähe von x_0 verstehen. Je stärker der Funktionsgraph Γ_f in P_0 gekrümmt ist, desto schlechter ist diese lineare Approximation. Bessere Approximationen erhält man, wenn man statt linearer Funktionen Polynome benutzt.

Definition 5.7. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ n -mal differenzierbar. Dann heißt

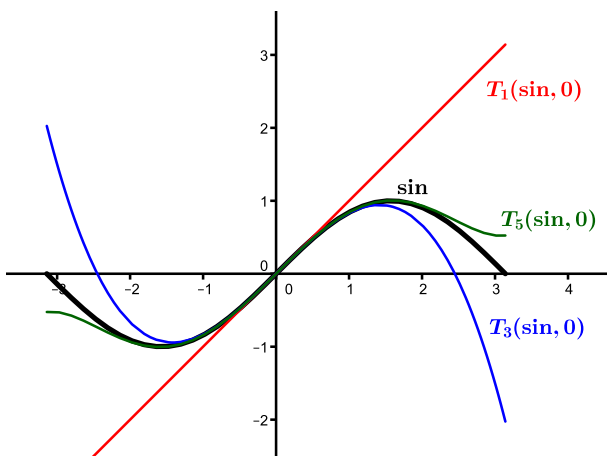
$$\begin{aligned} T_n(f, x_0)(x) &:= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \end{aligned}$$

das n -te Taylorpolynom von f in x_0 .

Das Taylorpolynom für $n = 1$ ist gerade die Tangentenfunktion $T_1(f, x_0)(x)$.

Ist $f''(x_0) \neq 0$, so beschreibt das Taylorpolynom für $n = 2$ eine Parabel, die sogenannte *Schmiegeparabel* an den Funktionsgraphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$:

$$T_2(f, x_0)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$



Die Approximation von \sin durch Taylorpolynome nahe $x_0 = 0$:

$$T_1(\sin, 0)(x) = x$$

$$T_3(\sin, 0)(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

$$T_5(\sin, 0)(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

Wir untersuchen jetzt, wie gut das n -te Taylorpolynom $T_n(f, x_0)$ die Funktion f in der Nähe von x_0 approximiert.

Definition 5.8. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ n -mal differenzierbar. Dann heißt $R_n(f, x_0)$ mit

$$R_n(f, x_0)(x) := f(x) - T(f, x_0)(x), \quad x \in I,$$

das n -te Restglied von f in x_0 .

Das n -te Restglied $R_n(f, x_0)$ beschreibt den Fehler, den wir bei der Approximation von f durch das n -te Taylorpolynom machen. Wir wollen jetzt Aussagen über die Größe dieses Fehlers machen. Für konkrete Abschätzungen des Fehlers $R_n(f, x_0)$ interessieren uns *explizite* Formeln für das Restglied $R_n(f, x_0)$.

Satz 5.18 (Explizite Formeln für das Restglied)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal differenzierbar und $R_n(f, x_0) := f - T_n(f, x_0)$ das n -te Restglied von f in $x_0 \in I$. Dann existiert für jedes $x \in I$ ein $\xi \in I$ zwischen x_0 und x sowie eine Zahl $\theta \in (0, 1)$, so dass gilt:

$$R_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{Lagrange-Form des Restgliedes}$$

$$R_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} (1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1} \quad \text{Cauchy-Form des Restgliedes}$$

(ξ und θ hängen von x ab!!)

Eine weitere Darstellung für das Restglied $R_n(f, x_0)$, die *Integraldarstellung*, werden wir in Kapitel 6 kennenlernen.

Beweis. Sei $x \in I$ ein fixierter Punkt mit $x \neq x_0$.

1. Wir zeigen die Cauchy-Form für das Restglied.

Wir betrachten dazu die differenzierbare Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(y) := f(x) - T_n(f, y)(x).$$

Dann gilt $g(x) = 0$, $g(x_0) = R_n(f, x_0)(x)$ und

$$\begin{aligned} g'(y) &= -\frac{d}{dy} \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k \right) \\ &= -\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} (x - y)^k + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} k(x - y)^{k-1} \\ &= -\frac{(x - y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y). \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $\theta \in (0, 1)$, so dass

$$\begin{aligned} g(x) - g(x_0) &= g'(\overbrace{x_0 + \theta(x - x_0)}^{=y}) \cdot (x - x_0) \\ &= -\frac{(x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$R_n(f, x_0)(x) = -(g(x) - g(x_0)) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!} (1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}.$$

Dies ist die Cauchy-Form des Restgliedes.

2. Wir zeigen die Lagrange-Form für das Restglied.

Wir betrachten dazu zusätzlich die differenzierbare Funktion $h : I \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $h(y) := (x - y)^{n+1}$. Dann gilt $h(x) = 0$, $h(x_0) = (x - x_0)^{n+1}$ und

$$h'(y) = -(n+1)(x-y)^n.$$

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz existiert ein ξ zwischen x_0 und x , so dass

$$(g(x) - g(x_0)) \cdot h'(\xi) = (h(x) - h(x_0)) \cdot g'(\xi).$$

Durch Einsetzen von $R_n(f, x_0)(x) = -(g(x) - g(x_0))$ folgt

$$R_n(f, x_0)(x) \cdot (n+1)(x-\xi)^n = (x-x_0)^{n+1} \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

und somit

$$R_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Dies ist die Lagrange-Form des Restgliedes. □

Die Formel

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

heißt *Taylorformel für f im Punkt x_0* . (Dabei könnte für das Restglied auch jede andere konkrete Darstellung stehen). Für viele Anwendungen reicht auch die folgende qualitative Beschreibung des Restgliedes:

Satz 5.19 (Qualitative Taylorformel)

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal stetig differenzierbar und $x_0 \in I$. Dann gilt:

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \underbrace{(x-x_0)^n \cdot r(x)}_{=R_n(f, x_0)(x)}, \quad (*)$$

wobei $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $r(x_0) = 0$ ist. Insbesondere gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(f, x_0)(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

d.h. das Restglied strebt für $x \rightarrow x_0$ schneller gegen Null als $(x-x_0)^n$.

Beweis. Für $x \neq x_0$ definieren wir

$$r(x) := \frac{R_n(f, x_0)(x)}{(x-x_0)^n}.$$

Dann ist $r : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Um das Verhalten von r für $x \rightarrow x_0$ zu bestimmen, benutzen wir die Lagrange-Form des Restgliedes $R_{n-1}(f, x_0)(x)$: Es existiert ein ξ zwischen x_0 und x , so dass

$$\begin{aligned}
r(x) &= \frac{f(x) - T_n(f, x_0)(x)}{(x - x_0)^n} \\
&= \frac{f(x) - T_{n-1}(f, x_0)(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} \\
&= \frac{1}{n!}(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)).
\end{aligned}$$

Für $x \rightarrow x_0$ gilt auch $\xi \rightarrow x_0$. Da $f^{(n)}$ stetig ist, folgt $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0$. r ist also durch 0 stetig in x_0 fortsetzbar und es gilt (*). \square

Folgerung 5.3 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal differenzierbare Funktion und $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in I$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n - 1$.

Beweis. Wir fixieren ein $x_0 \in I$ und benutzen die Taylorformel für $n - 1$ mit der Lagrange-Form des Restgliedes:

$$f(x) = T_{n-1}(f, x_0)(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Dabei ist ξ eine geeignete Zahl zwischen x_0 und x . Da nach Voraussetzung $f^{(n)}(\xi) = 0$, stimmt f auf I mit dem Taylorpolynom $T_{n-1}(f, x_0)$ überein. Dieses hat den Grad $\leq n - 1$. \square

Anwendung der Taylorformel auf Extremwertprobleme

Als weitere Anwendung der Taylorformel betrachten wir nochmal Extremwert-Probleme. Zunächst beweisen wir ein weiteres notwendiges Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremwertes:

Satz 5.20 (Notwendige Bedingung für einen lokalen Extremwert)

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar. Hat f in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum (bzw. lokales Minimum), dann gilt:

- a) $f'(x_0) = 0$ und
- b) $f''(x_0) \leq 0$ (bzw. $f''(x_0) \geq 0$).

Beweis. Die erste Bedingung kennen wir bereits aus Satz 5.5. Für den Beweis der 2. Bedingung betrachten wir die qualitative Taylorformel für $n = 2$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2 r(x),$$

mit $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0$. Da $f'(x_0) = 0$, gilt

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{1}{2}f''(x_0) + r(x)\right)(x - x_0)^2.$$

Besitzt f in x_0 ein lokales Maximum, so folgt

$$\frac{1}{2}f''(x_0) + r(x) \leq 0$$

für x hinreichend nahe an x_0 . Der Grenzübergang $x \rightarrow x_0$ liefert dann $f''(x_0) \leq 0$. Analog behandelt man den Fall des lokalen Minimums. \square

In Satz 5.11 hatten wir bereits ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremwertes einer 2-mal differenzierbaren Funktion kennengelernt. Dieses Kriterium können wir nun verallgemeinern.

Satz 5.21 (Hinreichende Bedingung für einen lokalen Extremwert)

Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal differenzierbare Funktion, $n \geq 2$, und $x_0 \in (a, b)$ ein Punkt mit $f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Dann gilt:

1. Ist n ungerade, so hat f in x_0 keinen lokalen Extremwert.
2. Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein isoliertes lokales Minimum.
Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum.

Beweis. Sei zunächst $f^{(n)}(x_0) > 0$. Dann gilt

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x - x_0} > 0.$$

Deshalb gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\frac{f^{(n-1)}(x)}{x - x_0} > 0$ für alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x) &< 0 && \text{auf } (x_0 - \delta, x_0), \\ f^{(n-1)}(x) &> 0 && \text{auf } (x_0, x_0 + \delta). \end{aligned}$$

Wir approximieren f durch das $(n-2)$ -te Taylorpolynom und benutzen die Lagrange-Form des Restgliedes:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{n-2}(f, x_0)(x) + R_{n-2}(f, x_0)(x) \\ &\stackrel{5.18}{=} f(x_0) + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\xi)(x - x_0)^{n-1} \end{aligned}$$

für ein geeignetes ξ zwischen x_0 und x . Ist n gerade, so ist $f^{(n-1)}(\xi)(x - x_0)^{n-1} > 0$ für alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$. Somit ist $f(x) > f(x_0)$ für alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$, d.h. f hat in x_0 ein isoliertes lokales Minimum.

Ist n ungerade, so gilt

$$f^{(n-1)}(\xi)(x - x_0)^{n-1} \begin{cases} > 0 & \text{auf } (x_0, x_0 + \delta) \\ < 0 & \text{auf } (x_0 - \delta, x_0). \end{cases}$$

Folglich hat f in x_0 keinen lokalen Extremwert. Mit analogen Argumenten behandelt man den Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$. \square

Ist f in $x_0 \in (a, b)$ unendlich oft differenzierbar und gilt $f^{(n)}(x_0) = 0$ für alle n , so kann man keine allgemeinen Aussagen über das Vorliegen eines lokalen Extremwertes machen. Sollen die Extrema von f auf einem *abgeschlossenen* Intervall $[a, b]$ bestimmt werden, so sind außer den Stellen $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$ auch noch die Intervallenden zu untersuchen. In diesen Intervallenden gilt das Kriterium aus Satz 5.21 nicht!

5.5 Taylorreihen und reell-analytische Funktionen

Wir kennen aus Kapitel 4 bereits einige Funktionen, die durch Potenzreihen definiert sind. Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen man eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ nahe $x_0 \in I$ als Potenzreihe darstellen kann. Nach Satz 5.17 muß f dazu in x_0 unendlich oft differenzierbar sein und als Potenzreihe kommt nur die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ mit $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ in Frage.

Definition 5.9. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ unendlich oft differenzierbar. Dann heißt die Reihe

$$T(f, x_0)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Taylorreihe von f in x_0 .

Definition 5.10. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in I$ reell-analytisch, falls ein Intervall $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$ und eine reelle Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$ existieren, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \min\{r, R\}, x_0 + \min\{r, R\}).$$

Man sagt in diesem Fall auch, dass f in einer Umgebung von x_0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist. x_0 heißt dann der Entwicklungspunkt.

Eine auf einem offenen Intervall (a, b) definierte Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt reell-analytisch, wenn f in jedem Punkt von (a, b) reell-analytisch ist.

$C^\omega((a, b), \mathbb{R})$ bezeichnet den Vektorraum der reell-analytischen Funktionen auf $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Beispiele für reell-analytische Funktionen:

1. Jede reelle Potenzreihe $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ mit positivem Konvergenzradius $R > 0$ definiert eine in x_0 reell-analytische Funktion f auf dem Konvergenzintervall.
2. Die Funktionen \exp , \sin , \cos , \sinh und \cosh sind reell-analytisch auf \mathbb{R} .
3. Die Funktion \arctan ist in $x_0 = 0$ reell-analytisch (siehe Kapitel 5.3).

Aus Satz 5.17 folgt

Satz 5.22 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ reell-analytisch in $x_0 \in I$. Dann ist f in einem offenen Intervall (a, b) um x_0 unendlich oft differenzierbar und es gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \quad \forall x \in (a, b).$$

Nach Satz 5.22 hat die Taylorreihe $T(f, x_0)(x)$ einer in x_0 reell-analytischen Funktion f einen positiven Konvergenzradius. Des Weiteren stimmt f in einer Umgebung von x_0 mit ihrer Taylorreihe überein. Beide Eigenschaften sind für C^∞ -Funktionen i.a. nicht erfüllt, wie die folgenden beiden Beispiele zeigen. Es gibt also C^∞ -Funktionen, die nicht reell-analytisch sind:

Beispiel 1: Die Taylorreihe einer C^∞ -Funktion kann den Konvergenzradius $R = 0$ haben:

Wir zitieren dazu einen Satz von Borel: Seien c_0, c_1, c_2, \dots beliebig vorgegebene reelle Zahlen. Dann existiert eine C^∞ -Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f^{(k)}(0) = k! \cdot c_k$, d.h. so dass

$$T(f, 0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Wir wählen nun die Koeffizienten c_k so, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ Konvergenzradius $R = 0$ hat. Den Beweis des Satzes von Borel kann man z.B. in *R. Narasimham: Analysis on real and complex manifolds, Nord Holland 1968* nachlesen.

Beispiel 2: Eine glatte Funktionen mit überall konvergenter Taylorreihe, die nicht mit ihrer Taylorreihe übereinstimmt:

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

f ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ unendlich oft differenzierbar. Für die k -ten Ableitungen in $x > 0$ gilt:

$$f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{q_k(x)}{x^{3k}},$$

wobei $q_k(x)$ ein Polynom ist x ist (Beweis durch vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}$). Daraus kann man wiederum durch vollständige Induktion zeigen, dass f auch in $x_0 = 0$ unendlich oft differenzierbar ist, wobei für die k -ten Ableitungen in $x_0 = 0$ gilt

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Für die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$ erhalten wir damit $T(f, 0)(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Definition ist aber $f(x) \neq 0$ für alle $x > 0$.

Satz 5.23 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ unendlich oft differenzierbar. Dann gilt:

Die Taylorreihe $T(f, x_0)(x)$ konvergiert für $x \in I$ genau dann gegen $f(x)$, wenn für die Restglieder in der Taylorformel gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x_0)(x) = 0.$$

Beweis. Nach Definition ist das Taylorpolynom $T_n(f, x_0)(x)$ die n -te Partialsumme der Taylorreihe $T(f, x_0)(x)$, d.h. $T(f, x_0)(x)$ konvergiert genau dann, wenn der Grenzwert

$$T(f, x_0)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f, x_0)(x)$$

existiert. Da $T_n(f, x_0)(x) = f(x) - R_n(f, x_0)(x)$ folgt

$$f(x) = T(f, x_0)(x) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, x_0)(x) = 0.$$

□

Beispiel 3: Die Taylorentwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$ in $x_0 = 0$.

Die Funktion $f(x) = \ln(x+1)$ ist in $x_0 = 0$ reell-analytisch und für ihre Taylorentwicklung gilt:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k \quad \text{für alle } x \in (-1, 1].$$

Insbesondere gilt für die alternierende harmonische Reihe ($x = 1$)

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

Beweis. Die Funktion $f(x) := \ln(x+1)$ ist auf $(-1, \infty)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt $f(0) = 0$ sowie

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!(-1)^{k+1}}{(1+x)^k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Für die Taylorreihe von $f(x) = \ln(x+1)$ in $x_0 = 0$ folgt

$$T(f, 0)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot x^k.$$

Wir zeigen, dass diese Reihe für alle $x \in (-1, 1)$ gegen $f(x)$ konvergiert. Dazu betrachten wir die Cauchy-Form des Restgliedes: Es existiert ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$R_n(f, 0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} (1-\theta)^n x^{n+1}.$$

Ist $|x| < 1$, so gilt $1-\theta < 1-\theta|x|$ und $1+\theta x \geq 1-\theta|x| > 1-|x| > 0$. Daraus folgt für $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} |R_n(f, 0)(x)| &= |x|^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} < |x|^{n+1} \frac{(1-\theta|x|)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} < \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left(\frac{1-\theta|x|}{1+\theta x} \right)^n \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}, \end{aligned}$$

und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, 0)(x) = 0$. Also konvergiert die Taylorreihe $T(f, 0)(x)$ für $|x| < 1$ gegen $f(x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad \text{für alle } |x| < 1.$$

Es bleibt die Konvergenz in $x = 1$ zu untersuchen. Nach dem Leibnizkriterium (Satz 3.23) konvergiert die alternierende harmonische Reihe $T(f, 0)(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \pm \dots$. Wir wenden nun den Abelschen Grenzwertsatz (Satz 5.16) an und erhalten wegen der Stetigkeit von \ln

$$\ln(2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} T(f, 0)(x) = T(f, 0)(1).$$

Somit gilt $\ln(1+x) = T(f, 0)(x)$ auch in $x = 1$. □

Beispiel 4: Die Taylorentwicklung von $f(x) := \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Die Reihe $\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergiert sehr langsam, eignet sich also nicht zur Berechnung von $\ln(2)$. Für die numerische Berechnung von Werten der Logarithmusfunktion eignet sich die Taylorentwicklung von $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Die Funktion $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ist in $x_0 = 0$ reell-analytisch und für ihre Taylorentwicklung gilt

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

Für den Beweis können wir die Taylorentwicklung aus Beispiel 3 benutzen. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (-x)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (1 - (-1)^k) x^k \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2}{2\ell+1} x^{2\ell+1}. \end{aligned}$$

Wir bestimmen damit jetzt $\ln(2)$ mit einer Genauigkeit von 4 Stellen nach dem Komma: Es gilt $\ln(2) = f\left(\frac{1}{3}\right) = T(f, 0)\left(\frac{1}{3}\right)$. Wir benutzen das Lagrange-Restglied, um den Fehler bei der Approximation von $\ln(2)$ durch das n -te Taylorpolynom abzuschätzen:

$$\ln(2) = T_n(f, 0)\left(\frac{1}{3}\right) + R_n(f, 0)\left(\frac{1}{3}\right) = T_n(f, 0)\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1},$$

wobei $0 < \xi < \frac{1}{3}$. Für die Ableitung berechnet man

$$f^{(n+1)}(\xi) = n! \left(\frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}} + \frac{1}{(1-\xi)^{n+1}} \right).$$

Für $0 < \xi < \frac{1}{3}$ kann man das Restglied somit abschätzen durch

$$0 < R_n(f, 0)\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} + \frac{1}{(1-\xi)^{n+1}} \right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} < \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \right).$$

Für $n = 10$ erhält man:

$$0 < R_{10}(f, 0)\left(\frac{1}{3}\right) < 5 \cdot 10^{-5}.$$

Für die Näherung von $\ln(2)$ durch das 10. Taylorpolynom $T_{10}(f, 0)\left(\frac{1}{3}\right)$ gilt:

$$\ln(2) \approx T_{10}(f, 0)\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} \right) = 0,693146047 \dots$$

Somit approximiert das 10. Taylorpolynom die Zahl $\ln(2)$ auf vier Stellen genau.

Beispiel 5: Die Taylorentwicklung von $f(x) := (1+x)^\alpha$ in $x_0 = 0$.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f(x) := (1+x)^\alpha$ ist in $x_0 = 0$ reell-analytisch und für ihre Taylorentwicklung gilt:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{für alle } x \in (-1, 1).$$

Für $\alpha = m \in \mathbb{N}$ ist diese Reihe endlich und beschreibt gerade die binomische Formel

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k.$$

Die Taylorentwicklung von $(1+x)^\alpha$ verallgemeinert also die binomische Formel. Die Reihe $B_\alpha(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ heißt *Binomialreihe*. (Vergleiche auch Übungsaufgabe 26).

Beweis. Wir bestimmen zunächst wieder die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$. $f(x) = (1+x)^\alpha$ ist auf $(-1, \infty)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt $f(0) = 1$ sowie

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

und daher

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} = \binom{\alpha}{k}.$$

Die Taylorreihe von $f(x) = (1+x)^\alpha$ in $x_0 = 0$ ist damit

$$T(f, 0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = B_\alpha(x).$$

Wir wissen bereits, dass die Binomialreihe $B_\alpha(x)$ für $|x| < 1$ konvergiert (siehe Übungsaufgabe 26). Wir zeigen nun, dass ihr Grenzwert $f(x) = (1+x)^\alpha$ ist. Wir betrachten dazu wieder die Cauchy-Form des Restgliedes

$$\begin{aligned} R_n(f, 0)(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)}{n!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} (1-\theta)^n x^{n+1} \\ &= \alpha \cdot \binom{\alpha-1}{n} (1-\theta)^n x^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} \\ &= \alpha \cdot \binom{\alpha-1}{n} \underbrace{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n}_{<1 \text{ für } |x|<1} x^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Daher gilt für $|x| < 1$

$$|R_n(f, 0)(x)| \leq \left| \binom{\alpha-1}{n} x^n \right| \cdot \underbrace{|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}|}_{=M \text{ unabh. von } n}.$$

Da die Binomialreihe $B_{\alpha-1}(x)$ für $|x| < 1$ konvergiert, ist $(|\binom{\alpha-1}{n} x^n|)_{n=0}^{\infty}$ eine Nullfolge und wir erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f, 0)(x) = 0 \quad \text{für alle } |x| < 1.$$

Damit konvergiert die Binomialreihe $B_{\alpha}(x) = T(f, 0)(x)$ für $x \in (-1, 1)$ gegen $(1+x)^{\alpha}$.

□

Sachverzeichnis

- $-A$, 23
- $A + B$, 23
- $E(z)$, 74
- $HP(x_n)$, 53
- $L(I)$, 25
- R , 72
- \mathbb{R} , 24
- $T(f, x_0)$, 133
- $T_n(f, x_0)$, 128
- a^z , 77
- arccos, 102
- arctan, 102
- $arg(z)$, 43
- arsinh, 104
- artanh, 105
- cosh, 103
- cot, 101
- e , 57, 75
- e^z , 75
- exp, 75
- f' , 108
- $f'(x_0)$, 108
- i , 41
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, 89
- lim inf, 56
- lim sup, 56
- ln, 76
- max A , 28
- min A , 28
- $n!$, 17
- sinh, 103
- sup A , 27
- tan, 101
- x über k , 18
- x^q , 37
- x^n , 33
- $x_n \rightarrow x$, 48
- \bar{x} , 41
- π , 99
- $(-\infty, a)$, 24
- $(-\infty, a]$, 24
- $(A | B)$, 26
- (a, ∞) , 24
- (a, b) , 24
- $(a, b]$, 24
- $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, 53
- (x_n) , 47
- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, 47
- $A \cdot B$, 23
- \mathbb{C} , 40
- $C^{(k)}(I, \mathbb{R})$, 114
- $C^\infty(I; \mathbb{R})$, 114
- $K(z_0, R)$, 72
- $[\mathbb{K}, +, \cdot]$, 23
- arccot, 102
- arcosh, 104
- arcoth, 105
- arcsin, 102
- $f^{(n)}$, 114
- inf A , 27
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 48
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, 89
- $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, 48
- $[a, \infty)$, 24
- $[a, b)$, 24
- $[a, b]$, 24
- $\binom{x}{k}$, 18
- $\binom{x}{0}$, 18
- $\frac{df}{dx}(x_0)$, 108
- \leq , 24
- $\prod_{i=1}^n x_i$, 23
- $\sqrt[n]{x}$, 36
- $\sum_{i=1}^n$, 23

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, 62$$

$$f'', 114$$

Abbildung, 11
 Abelscher Grenzwertsatz, 123
 Ableitung, 108
 der inversen Funktion, 111
 erste, 108
 n -te, 114
 absolut-konvergente Reihe, 63
 abzählbar, 30
 Additionstheoreme, 98, 102, 104
 Äquivalenz zweier Aussagen, 3
 alternierende harmonische Reihe, 69
 angeordneter Körper, 24
 Anordnungsaxiom der reellen Zahlen, 24
 Archimedisches Axiom der reellen Zahlen, 28
 Arcuscosinus, 102
 Arcuscotangens, 102
 Arcussinus, 102
 Arcustangens, 102
 Areacosinus hyperbolicus, 104
 Areacotangens hyperbolicus, 105
 Areasinus hyperbolicus, 104
 Areatangens hyperbolicus, 105
 Aussage, 1

 Bernoullische Ungleichung, 34
 beschränkt, 27
 von oben, 27
 von unten, 27
 bestimmt divergent, 54
 Betrag einer komplexen Zahl, 32
 Betrag einer reellen Zahl, 25
 bijektive Abbildung, 13
 Bild einer Abbildung, 11
 Binomialkoeffizient, 18
 Binomialreihe, 137
 Binomischer Satz, 33

 Cantorsches Diagonalverfahren, 31
 Cauchy-Folge, 60
 Cauchy-Kriterium für Reihen, 63
 Cauchy-Produkt von Reihen, 70
 Cosinus, 97
 Cosinus hyperbolicus, 103
 Cotangens, 101

 Dedekindscher Schnitt von \mathbb{R} , 25
 Definitionsbereich, 11
 Diagonalverfahren von Cantor, 31

Differenz von Mengen, 9
 differenzierbar, 108
 differenzierbare Funktion, 108
 direkter Beweis, 6
 Disjunktion zweier Aussagen, 2
 divergente Folge, 48
 divergente Reihe, 62
 Dreiecksungleichung, 25, 42
 Durchschnitt von Mengen, 8

 echte Teilmenge, 8
 Einschränkung einer Abbildung, 12
 Element einer Menge, 7
 Eulerzahl, 57
 Exponentialfunktion, komplexe, 75

 Fakultät, 17
 Fixpunkt einer Funktion, 92
 Folge, 47
 bestimmt divergente, 54
 der Partialsummen, 62
 divergente, 48
 konvergente, 48
 monoton fallende, 55
 monoton wachsende, 55
 monotone, 55
 uneigentlich konvergente, 54
 Folge, nach $\pm\infty$ strebend, 54
 Folgenkriterium für Stetigkeit, 81
 Fortsetzung einer Abbildung, 12
 Fundamentalsatz der Algebra, 46, 95
 Funktion, 11

 Gaußsche Zahlenebene, 42
 geometrische Reihe, 35, 65
 geometrische Summe, 35
 glatte Abbildung, 114
 gleichmäßig stetig, 85
 gleichmächtige Mengen, 32
 Graph einer Abbildung, 11
 Grenzwert
 Eindeutigkeit, 48
 einer Folge, 48
 linksseitiger, 89
 rechtsseitiger, 89
 uneigentlicher, 54
 Grenzwertsatz, Abelscher, 123

 Häufungspunkt einer Folge, 53
 höchstens abzählbar, 31
 harmonische Reihe, 64
 alternierende, 69, 135

- Hebbare Unstetigkeitsstelle, 90
- hinreichend, 3
- Hyperbelfunktionen, 103

- Identität, 12
- imaginäre Einheit, 41
- Implikation, 3
- indirekter Beweis, 6
- Induktion, vollständige, 16
- Infimum, 27
- injektive Abbildung, 13
- Inklusionsabbildung, 12
- Intervall
 - abgeschlossenes, 24
 - halboffenes, 24
 - Länge, 25
 - offenes, 24
- Intervallschachtelung, 29
- inverse Abbildung, 13

- Körper, 22
 - angeordneter, 24
 - vollständiger angeordneter, 26
- Körperaxiom der reellen Zahlen, 23
- Kettenregel, 110
- kleiner gleich, 24
- Komplement von Mengen, 9
- komplex-wertige Funktion, 79
- komplexe Funktion, 79
- komplexe Potenz der Eulerzahl, 75
- komplexe Zahl, 40
 - n -te Wurzel
 - geometrische Bedeutung, 45
 - algebraische Form, 41
 - Argument, 43
 - Betrag, 42
 - n -te Wurzel, 45
 - Polarform, 43
 - trigonometrische Darstellung, 43
- komplexe Zahlen
 - Dreiecksungleichung, 42
 - geometrische Deutung der Addition, 43
 - geometrische Deutung der Multiplikation, 44
- komplexe Zahlenebene, 42
- konjugiert komplex, 41
- Konjunktion zweier Aussagen, 2
- konkave Funktion, 119
- konstante Abbildung, 12
- Kontinuumshypothese, 33
- konvergente Folge, 48
- konvergente Reihe, 62

- Konvergenzkreis einer Potenzreihe, 72
- Konvergenzradius, 72–74
- konvexe Funktion, 118

- L'Hospital'sche Regeln, 120
- leere Menge, 7
- Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen, 69
- Leibniz-Reihe, 70
- Leibnizformel, 126
- limes inferior, 56
- limes superior, 56
- Linksinverse einer Abbildung, 14
- linksseitiger Grenzwert, 89
- Lipschitz-Konstante, 85
- lipschitzstetig, 85
- Logarithmus
 - natürlicher, 76
- logisches Gesetz, 4
- lokaler Extremwert
 - hinreichende Bedingung, 132
- lokales Maximum, 115
- lokales Minimum, 115

- Mächtigkeit, größere, 32
- Machinsche Formel, 127
- Majorantenkriterium, 66
- Maximum, 28
- Maximum einer Funktion, 92
- Maximum,lokales, 115
- Menge, 7
- Minimum, 28
 - lokales, 115
- Minimum einer Funktion, 92
- Mittelwertsatz
 - von Lagrange, 117
- monoton fallende Folge, 55
- monoton wachsende Folge, 55
- monotone Folge, 55

- Negation einer Aussage, 2
- notwendig, 3
- n -te Ableitung, 114
- Nullfolge, 52
- Nullstelle einer Funktion, 92

- Partialsumme, 62
- Partialsummen, Folge der, 62
- pi
 - Berechnung, 126
- π , 99
- Potenz, 33
 - mit rationalem Exponent, 77

- Potenz, komplexe, 77
 - der Eulerzahl, 75
- Potenzmenge, 8
- Potenzreihe, 72
- Prinzip der Intervallschachtelung, 29
- Produkt von Mengen, 10
- Produktregel, 109
- Projektion, 12

- Quantoren, 4
- Quotientenkriterium, 67
- Quotientenregel, 109

- Rechtsinverse einer Abbildung, 14
- rechtsseitiger Grenzwert, 89
- reell-analytisch, 133
- reell-wertige Funktion, 79
- reelle Funktion, 79
- reelle Zahlen, 21
 - Anordnungsaxiom, 24
 - Körperaxiom, 23
 - Vollständigkeitsaxiom, 26
- Reihe, 62
 - absolut-konvergente, 63
 - divergente, 62
 - geometrische, 65
 - harmonische, 64
 - konvergente, 62
 - Partialsumme, 62
 - Wert einer Reihe, 62
- Restglied, 128
- Ringschluß, 7

- Satz von
 - Bolzano/Weierstraß, 55
 - Borel, 134
 - Rolle, 116
- Schnittzahl von $(A | B)$, 26
- Schranke
 - obere, 27
 - untere, 27
- Sinus, 97
- Sinus hyperbolicus, 103
- Sprungstelle, 90
- stetig differenzierbar, 114
 - n -mal, 114
- stetige Funktion, 80
- stetige Funktion in x_0 , 80
- Stetigkeit
 - Folgenkriterium, 81
- Summenregel, 109
- Supremum, 27
- surjektive Abbildung, 13

- Tangens, 101
- Tautologie, 4
- Taylorpolynom, 128
- Taylorreihe, 133
- Teilfolge, 53
- Teilmenge, 8
- trigonometrische Funktionen, 97

- überabzählbar, 31
- Umkehrabbildung, 13
- uneigentlich konvergente Folge, 54
- uneigentlicher Grenzwert, 54
- Unstetigkeitsstelle
 - 2. Art, 91
 - hebbare, 90
 - Sprungstelle, 90
- Urbild eines Punktes, 11

- Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung von Cauchy, 116
- Vereinigung von Mengen, 8
- Verknüpfung von Abbildungen, 12
- vollständige Induktion, 16
- vollständiger angeordneter Körper, 26
- Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen, 26

- Wahrheitstafel, 2
- Wahrheitswert, 2
- Wendepunkt, 120
- Wert einer Reihe, 62
- Wertebereich, 11
- Wurzel, n -te, 36
- Wurzelkriterium, 66

- Zentrum einer Potenzreihe, 72
- Zerlegungssatz für komplexe Polynome, 96
- zweimal differenzierbar, 114
- zweite Ableitung, 114