Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrveranstaltung: HS Didaktik
Wintersemester 2009 / 2010
Dozenten: Fr. Warmuth, Hr. Giese

# „Von den natürlichen Zahlen über die Bruchzahlen zu den rationalen Zahlen“

Jenni Radermacher
Matrikelnr.: 516029
jenni.radermacher@gmx.de
Studiengang: Master of Education
1. Fachsemester

Anna Catharina Robben
Matrikelnr.: 516784
anna.robben@live.de
Studiengang: Master of Education
1. Fachsemester

# Inhaltsverzeichnis

# Abbildungsverzeichnis

# 1. Einleitung

In der Literatur wird der Aufbau des Zahlensystems als eine in Jahrtausenden gewachsene Kulturleistung von höchster Perfektion bezeichnet. Die Schülerinnen und Schüler sollten diese Kulturleistung zumindest teilweise nachvollziehen können und daher ist sie aus dem schulischen Lehrplan nicht mehr wegzudenken. Die Zahlbereichserweiterungen sind eines der Kernthemen in der Mittelstufe aller Schularten und stellen für die Schülerinnen und Schüler eine große Herausforderung dar. Zahlbereiche werden immer dann erweitert, wenn die Ansprüche an die Genauigkeit und Reichhaltigkeit der Beschreibungsmittel steigen und die alte Zahlenmenge diese Aufgabe nicht mehr erfüllen kann.

In dieser Arbeit werden wir uns genauer mit den Zahlbereichserweiterungen von den natürlichen Zahlen zu den positiven rationalen Zahlen und von diesen zu der Menge aller rationaler Zahlen beschäftigen. Zunächst werden in Kapitel 2 die Zahlbereichserweiterungen auf universitärem Niveau vorgestellt. Anschließend werden wir in Kapitel 3 genauer auf die jeweiligen Zahlbereichserweiterungen eingehen, uns genauer mit Gründen für die Einführung, den Problemen, die in der Schule im Umgang mit den „neuen“ Zahlen auftreten können, und den Wandlungen, die in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler vonstatten gehen müssen, beschäftigen. Möglichkeiten und Modelle, wie man die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division in der Schule einführen und den Schülerinnen und Schülern veranschaulichen kann werden in Kapitel 4 vorgestellt und erklärt. Danach werden wir in Kapitel 5 eine Unterrichtseinheit zur Einführung der Addition der rationalen Zahlen vorstellen. Für die Kapitel 4 und 5 wird die allgemeine Einführung der ganzen Zahlen vorausgesetzt. Weiterhin wird angenommen, dass Begriffe wie „Gegenzahl“ und „Betrag“ bekannt sind, und die Anordnung der ganzen Zahlen auf der Zahlengerade veranschaulicht wurde. Selbstredend wird außerdem vorausgesetzt, dass die vier Grundrechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) auf den natürlichen Zahlen wie auch die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze bekannt sind. Sollte es bei einzelnen Beispielen, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, weitere Voraussetzungen geben, so werden diese an gegebener Stelle genannt.

Um einen kurzen Überblick über einige Mathematikbücher, die in den Schulen genutzt werden, zu geben, wird deren Vorgehensweise im Bezug auf die Zahlbereichserweiterung von den positiven rationalen Zahlen zur Menge aller rationaler Zahlen in Kapitel 6 vorgestellt und bewertet. Abschließend werden wir im Kapitel 7 dieser Arbeit einen kurzen Überblick über die Thesendiskussion, welche im Plenum stattgefunden hat, geben und ein im 8. Kapitel ein Fazit ziehen.

# 2. Zahlbereichserweiterungen in der Universität

In dieser Ausarbeitung wollen wir uns zunächst damit beschäftigen, wie die Zahlbereichserweiterungen in der Uni vollzogen und eingeführt werden. In der Fachliteratur findet man zunächst die Erweiterung von den natürlichen Zahlen zu den negativen Zahlen.
Die negativen Zahlen werden in der Literatur wie folgt definiert:

> Als negative Zahl bezeichnen wir jedes geordnete Paar $(-,n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Statt $(-,n)$ schreiben wir $-n$. Die Menge aller negativen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}^-$ also $\mathbb{N}^- := \{-n | n \in \mathbb{N}\}$. Für die Zahl 0 gilt $0 \neq n$ und $0 \neq -n \, \forall n \in \mathbb{N}$. Als Menge $\mathbb{Z}$ aller negativen Zahlen bezeichnen wir die Vereinigungsmenge von $\mathbb{N}, \{0\}$ und $\mathbb{N}^-$, , also $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^-$.

Bei dieser Art der Erweiterung spricht man von einem Anbau, da die neue Zahlenmenge an die alte angebaut wird und die Rechenregeln somit nur für den neuen Teil der Zahlenmenge überprüft werden muss. Für den alten Anteil, also die Teilmenge der natürlichen Zahlen, gelten die Rechengesetze und Regeln weiterhin.

Für die zweite Zahlbereichserweiterung von den negativen Zahlen $\mathbb{Z}$ zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ wird das Prinzip des Neubaus verwendet. Bei einem Neubau müssen alle Rechenregeln für die neue Zahlenmenge neu überlegt und bewiesen werde.

Die Menge $\mathbb{Q}$ wird wie folgt definiert:

> Als rationale Zahl bezeichnen wir jedes geordnete Paar $(a,b)$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. Statt $(a,b)$ schreiben wir $a/b$. Die Menge aller rationalen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{Q}$, also: $\mathbb{Q} := \{ a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Zwei rationale Zahlen $a/b$ und $c/d$ stehen in einer Relation zueinander, genau dann wenn $a \cdot d = c \cdot b$ gilt. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation.
Der Begriff „Bruchzahl“ wird dabei für eine Klasse der Äquivalenzrelation verwendet, meistens benutzt man den komplett gekürzten Bruch als Bezeichnung für die Äquivalenzklasse. Bei dem Begriff „Bruch“ spricht man von einem Repräsentanten einer Bruchzahl. In der Schule sollte die Unterscheidung zwischen Bruchzahl und Bruch jedoch vermieden werden, da dies nur zu Verwirrungen der Schülerinnen und Schüler führt.

# 3. Zahlbereichserweiterungen in der Schule

Die Erweiterung der Zahlbereiche kann Irritationen bei den Schülerinnen und Schülern auslösen, da Gewohnheiten über die „normalen Zahlen“, also die vertrauten natürlichen Zahlen, plötzlich in Frage gestellt werden und ihre Vorstellungen von Zahlen nicht mehr passen. Unterschiedliche empirische Forschungen haben gezeigt, dass die erforderlichen Wandlungen in den Vorstellungen eine bedeutende Fehlerquelle sind und Zahlbereichserweiterungen eine große Herausforderung für die Schülerinnen und Schüler darstellen. Daher bedürfen die Zahlbereichserweiterungen einer besonderen didaktischen Aufmerksamkeit und sollten von den Lehrkräften gut vorbereitet und durchdacht werden (Hefendehl-Hebeker; Prediger 2006, S. 1f).

Im Schulunterricht ist laut Padberg, Danckwerts und Stein (1995) im Gegensatz zur Hochschulmathematik die Abfolge von den natürlichen Zahlen über die positiven rationalen Zahlen zu allen rationalen Zahlen üblich. Angeblich beruht diese Abfolge auf der einen Seite auf der historischen Entwicklung und auf der anderen Seite auf der unterschiedlichen Bedeutsamkeit der jeweiligen Zahlbereiche für das alltägliche Leben. Des Weiteren wird angeführt, dass die Bruchzahlen und die dazugehörigen Rechenoperationen von der Vorstellung her deutlich einfacher wären als die negativen Zahlen mit ihren Rechenregeln.

Im folgenden Kapitel sollen die Anlässe, Probleme und notwenigen Wandlungen der Zahlbereichserweiterungen von den natürlichen Zahlen zu den positiven rationalen Zahlen, und von ebendiesen zu den rationalen Zahlen genauer untersucht und erläutert werden.

## 3.1 Die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den positiven rationalen Zahlen

Die erste systematische Zahlbereichserweiterung, die in der Schule durch einen Neubau gewonnen wird, erleben die Schülerinnen und Schüler in der Doppeljahrgangsstufe 5/6. Nach dem Berliner Rahmenlehrplan für die Grundschule sollen sie im Themenfeld „Zahlen und Operationen“

- die Notwendigkeit für die Zahlbereichserweiterung begründen,
- gebrochene Zahlen identifizieren und realisieren, lesen, schreiben und ordnen und

- Rechenoperationen und deren Verknüpfungen im Bereich der gebrochenen Zahlen ausführen und verbalisieren

können (Rahmenlehrplan für die Grundschule 2006, S. 40).

Die Anlässe für die Einführung der positiven rationalen Zahlen, die Probleme, die im Schulalltag im Umgang mit ihnen auftreten und die Wandlungsprozesse, die in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler vonstatten gehen müssen, sollen nachfolgend dargelegt werden.

### 3.1.1 Anlässe

Nachdem die Schülerinnen und Schüler die natürlichen Zahlen gründlich kennengelernt haben, werden die positiven rationalen Zahlen eingeführt. Ein wichtiger Anlass dafür liegt natürlich darin, dass die Schülerinnen und Schüler die Bruchzahlen schon aus ihrer Umwelt her kennen. So kommen positive rationale Zahlen in Alltagssituationen, wie z.B. dem Lesen der Uhr oder dem Nachkochen von Rezepten vor und sind den meisten Kindern daher schon bekannt.

Auf der mathematischen Ebene liegen Gründe für die Einführung darin, dass die natürlichen Zahlen zwar vielfältig einsetzbar sind, aber zur „knappen Beschreibung bzw. Lösung schon vieler elementarer Sachverhalte" (Padberg, Danckwerts, Stein 1995, S. 62) nicht mehr ausreichen. So erhöht die Einführung der positiven rationalen Zahlen z.B. die *Genauigkeit beim Zählen und Messen*. So werden, wenn die verfügbaren Zahlen ihre „Aufgabe, quantitative Angaben zu präzisieren, nicht mehr zufriedenstellend erfüllen" (Hefendehl-Hebeker; Prediger 2006, S. 2), neue Zahlen benötigt und müssen im Mathematikunterricht eingeführt werden. Brüche sind für genaue Längenmessungen, aber auch für die Bestimmung von Flächeninhalten, Volumina, Geldwerten, Zeitspannen und ganz allgemein für Messungen von Größen wichtig. Ebenso sind Bruchzahlen nötig, um bei beliebigen Verteilsituationen, wie z.B. dem *Verteilen* von vier gleichgroßen Pizzen auf sechs Personen, ein präzises Ergebnis angeben zu können. Bei solchen Verteilsituationen war es bis zur Einführung der positiven rationalen Zahlen nur möglich, ein genaues Ergebnis anzugeben, wenn dieses eine natürliche Zahl war.

Ein weiterer Anlass zur Einführung dieses neuen Zahlenbereichs ist, dass im Bereich der natürlichen Zahlen eine Divisionsaufgabe nur dann lösbar ist, wenn der Dividend ein Vielfaches des Divisors ist, und so einfache Aufgaben wie $2 : 3 =$ nicht lösbar bzw. nur durch die Angabe eines Restes lösbar waren. Mit Hilfe der positiven rationalen Zahlen können die Schülerinnen und Schüler jetzt *uneingeschränkt dividieren* und als Ergebnis dieser Aufgabe $\frac{2}{3}$

angeben. Ebenso waren vor der Einführung der positiv rationalen Zahlen in der *Gleichungslehre* nicht alle Gleichungen und Divisionsaufgaben der Form $ax = b$ lösbar, sondern nur solche, bei denen $b$ ein Vielfaches von $a$ ist. Das bedeutet, dass beim Lösen von komplexen Gleichungen und linearen Gleichungssystemen, den dazugehörigen Äquivalenzumformungen und der Angabe der Lösungsmenge häufig Bruchzahlen gebraucht werden (Padberg, Danckwerts, Stein 1995, S. 63f).

### 3.1.2 Wandlungen und Probleme

Die Notwenigkeit der Zahlbereichserweiterung wird häufig akzeptiert und verstanden, aber die eigentlichen Herausforderungen beginnen im Umgang mit den Zahlen und den dazugehörigen Operationen. Schwierigkeiten beim Umgang mit den neuen Zahlen sind dabei keine Defizite der Schülerinnen und Schüler, sondern sind „in der Stoffstruktur selbst begründet" (Hefendehl-Hebeker; Prediger 2006, S. 3). Daher muss den Schülerinnen und Schüler verdeutlicht werden, dass die alten Rechenregeln nicht beliebig beibehalten werden können. Stattdessen muss eine Veränderung in ihrer Gedankenwelt stattfinden, die verschiedenen Wandlungen unterliegt. Dabei müssen alle wesentlichen Gesichtspunkte, die zur Charakteristik der Zahlen gehören, erweitert und modifiziert werden (Hefendehl-Hebeker; Prediger 2006, S. 3).

Die erste Zahlbereichserweiterung macht also einen gründlichen Wandel der Zahlenvorstellung notwendig. Dabei muss den Schülerinnen und Schülern klar werden, dass die Interpretation von Zahlen vielfältiger wird. Brüche beschreiben nicht nur Anzahl und Ordnungszahlen wie die natürlichen Zahlen, sondern, wie schon beschrieben, auch Anteile, Verhältnisse, Verteilsituationen und vieles mehr. Des Weiteren müssen die Kinder begreifen, dass sich auch die Zahlendarstellung verändert. Im Gegensatz zu natürlichen Zahlen, die sich eindeutig darstellen lassen haben, gibt es unterschiedlichste Bruchdarstellungen. So wird zunächst ein Bruch durch zwei ganze Zahlen, einer im Zähler und einer im Nenner, dargestellt, was für die Schülerinnen und Schüler neu ist. Ebenso schwierig zu verstehen ist, dass sich jede Bruchzahl durch unendlich viele repräsentative Brüche, aber auch in Dezimalschreibweise darstellen lässt (Hefendehl-Hebeker; Prediger 2006, S. 3).

Auch die Übertragung der Ordnung von $\mathbb{N}$ auf den Bereich der Bruchzahlen ist ein häufiger Fehler im Mathematikunterricht. Während diese Übertragung bei gleichnamigen Brüchen

zum richtigen Ergebnis führt (Bsp. $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$ ), führt dies bei Brüchen mit gleichen Zählern häufig zu Fehlern ( $\frac{1}{3} < \frac{1}{4}$; falsche Begründung:$3 < 4$), und auch bei beliebigen Brüchen kommt es oft bei der Ordnung auf dem Zahlenstrahl zu Fehlern. Weiterhin unklar ist den Schülerinnen und Schülern oft, warum es keinen kleinsten Bruch gibt und zwischen zwei Brüchen immer unendlich viele andere Bruchzahlen liegen (Dichtheit der Bruchzahlen).
Die Rechenoperationen und –regeln sind einer der Hauptfehlerschwerpunkte bei der Einführung neuer Zahlbereiche, und so wenden Schülerinnen und Schüler häufig ihnen schon bekannte und vertraute Rechenregeln auch auf die neuen Zahlbereiche an oder sie verwechseln die gültigen Rechenregeln. Im Folgenden einige Beispielfehler:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ : Hierbei wird der Bruch nicht als eine Zahl, sondern als zwei voneinander unabhängige Zahlen angesehen, oder die Multiplikationsregel auf die Addition angewendet.
- $n + \frac{a}{b} = \frac{n+a}{b}$ : Die Ursachen für diese Fehlerart liegt auch hier in der fehlerhaften Übertragung der Multiplikation auf die Addition.

Auch die alte intuitive und grundlegende Vorstellung, dass beim Multiplizieren etwas vergrößert und beim Dividieren etwas verkleinert wird, verliert beispielsweise beim Rechnen mit Brüchen ihre Gültigkeit. Deswegen sollte man den Schülerinnen und Schülern eine inhaltliche Vorstellung der Multiplikation von Brüchen durch den „von“-Ansatz plausibel machen. Bei diesem wird das Multiplizieren von Brüchen als das „Anteile-Bilden von Anteilen“ verstanden, und so können die Kinder die intuitive Regel von den Auswirkungen einer Multiplikation wandeln und einsehen, dass eine Multiplikation nicht zwangsläufig zu einer Vergrößerung führen muss (Hefendehl-Hebeker; Prediger 2006, S. 4).

In höheren Klassenstufen sollte man mit den Schülerinnen und Schülern die Mächtigkeit der Bruchzahlen thematisieren. Die Frage, ob die Menge der natürlichen Zahlen und die der positiven rationalen Zahlen gleichmächtig sind, ob also eine bijektive Abbildung zwischen ihnen existiert, scheint auf den ersten Blick auf Grund der Dichtheit der Bruchzahlen leicht beantwortbar zu sein. Eine Durchnummerierung der Bruchzahlen, so wie bei den natürlichen Zahlen, scheint wegen der Dichtheit nicht möglich zu sein, und um so überraschender ist es für die Schülerinnen und Schüler oft, dass dieses doch auf Grund des „Cantorschen Diagonalverfahrens“ möglich ist (Padberg, Danckwerts, Stein 1995, S.91f). Dieses sollte natürlich im Unterricht behandelt werden, wird an dieser Stelle aber nicht weiter thematisiert.

### 3.1.3 Wiedererkennung der „alten“ in den „neuen“ Zahlen

Trotz des Neubaus des Zahlenbereichs sollen die Schülerinnen und Schüler die „alten“ Zahlen weiter im Hinterkopf behalten und mit diesen weiterhin rechnen können. Des Weiteren können sie diese auch in den „neuen“ Zahlen wiedererkennen. Zum Beispiel wird jeder Bruch durch zwei natürliche Zahlen dargestellt, bei dem eine im Nenner und eine im Zähler steht. Allerdings sollte hier trotzdem darauf geachtet werden, dass die Schülerinnen und Schüler die Bruchzahl als eine Zahl und nicht als zwei voneinander unabhängige natürliche Zahlen ansehen. Ebenso sollte ihnen bewusst sein, dass sich jede natürliche Zahl durch unendlich viele repräsentative Brüche darstellen lässt (Bsp.: $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \cdots$).

Mit Hilfe der Wiedererkennung der „alten“ in den „neuen“ Zahlen können auch Rechenregeln erarbeitet werden, indem man beispielsweise sagt, dass das Ergebnis einer Rechenaufgabe ja auch weiterhin stimmen muss, auch wenn die natürliche Zahl durch einen repräsentativen Bruch dargestellt ist.

## 3.2. Zahlbereichserweiterung von den positiven rationalen Zahlen zur Menge aller rationaler Zahlen

In der Doppeljahrgangsstufe 7/8 erfahren die Schülerinnen und Schüler die zweite systematische Zahlbereichserweiterung, nach der ihnen der Zahlenraum der rationalen Zahlen vollständig zu Verfügung steht. Dieser Zahlenbereich wird dieses Mal durch einen Anbau an die positiven rationalen Zahlen gewonnen, indem zu jeder positiven rationalen Zahl ein entsprechendes negatives Element konstruiert und die Null hinzugefügt wird. Damit wird ein Zahlenbereich erschlossen, in dem die Schülerinnen und Schüler vielfältige Probleme ihrer Umwelt lösen können. Laut Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I sollen die Schülerinnen und Schüler nach dem Modul P3 „Negative Zahlen verstehen und verwenden“, welches zur Leitidee Zahl gehört, zu Folgendem in der Lage sein:

- Verwenden von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen zur Darstellung mathematischer Situationen und zur Lösung von Problemen.

- Durchführen einfacher Rechnungen und Überschlagsrechnungen im Kopf und Nutzen der Rechengesetze zum vorteilhaften Rechnen.
- Erläutern der Verwendungsweisen von negativen Zahlen an Beispielen (Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I 2006, S.28).

Die Vorstellungen von negativen Zahlen und den Operationen mit ihnen werden im Schulunterricht oft mit Hilfe von Modellen gebildet, auf die wir später noch genauer eingehen werden.

Auch für die Zahlbereichserweiterung von den positiven rationalen Zahlen zu der Menge aller rationalen Zahlen gibt es vielfältige Gründe und Anlässe zur Einführung des neuen Zahlbereichs, die wiederum zu neuen Probleme im Umgang mit ihnen führen.

### 3.2.1 Anlässe

Auch wenn die Bruchzahlen schon vielseitiger einsetzbar sind als die natürlichen Zahlen, gibt es noch eine Anzahl von Situationen in der Umwelt der Schülerinnen und Schüler und auch innerhalb der Mathematik, in denen die positiven rationalen Zahlen nicht zur Angabe oder Lösung der Situationen ausreichen. Und so gibt es viele Anlässe zur Einführung der Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen.

Die Kinder wissen aus ihrem alltäglichen Leben, dass im Winter die Temperaturen durchaus mal unter Null Grad Celsius fallen können, dass das Konto ihrer Eltern auch mal im Minus steht oder dass Meerestiere in Tiefen leben, die tiefer als Normalnull (NN) sind. Das heißt, die Schülerinnen und Schüler begegnen negativen Zahlen schon zu einem frühen Zeitpunkt in ihrer Umwelt und begreifen, dass viele Größen für ihre einfache Beschreibung Skalen benötigen, die auch unter die Null gehen. Daher sollten diese Zahlen auch im Mathematikunterricht mitsamt ihrer Rechenoperationen eingeführt werden. Dabei sollte auch thematisiert werden, dass der Nullpunkt je nach Kontext unterschiedliche Bedeutungen haben kann. Bei Kontoständen und Temperaturen ist der Nullpunkt auch die Null, und der von den positiven rationalen Zahlen vertraute Zahlenstrahl wird symmetrisch zum Anfangspunkt (Nullpunkt) zur Zahlengerade erweitert, wodurch sich viele symmetrische Skalen geometrisch veranschaulichen lassen. Der Nullpunkt kann aber auch ein frei gewählter Zeitpunkt sein, wie z.B. das Normalnull oder die Geburt Christi in der christlichen Zeitrechnung (Padberg, Danckwerts, Stein 1995, S.117 / Hefendehl-Hebeker; Prediger 2006, S. 4).

Neben den Begegnungen der Schülerinnen und Schüler mit negativen Zahlen in ihrer Umwelt erweitern diese, in gleicher Weise wie die positiven rationalen Zahlen, noch einmal die *Möglichkeiten beim Messen*, um beispielsweise eine Größe relativ zu einer gewählten Vergleichsmarke zu bestimmen. Durch rationale Zahlen lassen sich also *gerichtete Größen beschreiben*. Ebenso werden sie für eine knappe und einheitliche *Beschreibung von Zustandsänderungen* genutzt, wie die Ein- und Auszahlungen auf ein Konto oder die Änderung der Temperatur zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten. Eine Verknüpfung kann durch mehrere Zustandsänderungen, die hintereinander ausgeführt werden, eingeführt werden.
Ein weiterer Grund für die Einführung der positiven rationalen Zahlen ist, dass eine Subtraktion im Bereich der positiven rationalen Zahlen nur dann möglich ist, wenn der Minuend größer ist als der Subtrahend. Die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen brauchen wir also, um *uneingeschränkt subtrahieren* zu können und so einfache Aufgaben wie $4 - 5 = -1$ lösen zu können. Dadurch können die Schülerinnen und Schüler nach der zweiten Zahlbereichserweiterung dann auch alle Gleichungen der Form $a + x = b$ lösen, was bei den positiven rationalen Zahlen nur möglich wäre, wenn $a < b$ gilt. Generell sind negative rationale Zahlen und deren Rechenoperationen wichtig für die systematische *Gleichungslehre* (Padberg, Danck-werts, Stein 1995, S.117f).

### 3.2.2 Wandlungen und Probleme

Wie bei jeder Zahlbereichserweiterung müssen sich die Lehrkräfte der Schwierigkeiten und häufigen Probleme der Schülerinnen und Schüler im Umgang mit den neuen Zahlen bewusst sein, sodass sie in ihrem Unterricht auf diese Problematik ein besonderes Augenmerk legen können. Zunächst sollte die Lehrperson den Unterschied zwischen Vorzeichen und Rechenzeichen behandeln und schülergerecht aufarbeiten. Eine klare Deklarierung und das Einsetzen von Klammern können am Anfang hilfreich sein, um den Schülerinnen und Schülern den Umgang zu erleichtern. Im späteren Unterrichtsverlauf sollten sie aber dahin geführt werden, dass sie der Einfachheit halber die Klammern und das Pluszeichen bei Zahlen mit positiven Vorzeichen weglassen.
Eine weitere Wandlung in den Köpfen der Kinder muss sich hinsichtlich der Ordnungsrelation vollziehen, da Probleme mit dieser auch hier wieder eine große Rolle spielen. Daher sollte,

wie im vorherigen Kapitel schon angedeutet, viel Wert darauf gelegt werden, dass die negativen Zahlen als relative Zahlen bezüglich einer Vergleichsmarke (Normalnull) angesehen werden, und die positiven und negativen Zahlen sollten auf einer gemeinsam orientierten Zahlengeraden angeordnet werden. Andernfalls kann es zu der Gefahr kommen, dass auf Grund der Symmetrie der Zahlengeraden eine spiegelbildliche Übertragung der Ordnungsrelationen vorkommt und fälschlicherweise gesagt wird, dass beispielsweise $-4 > -3$ ist.

Neben Loslösung von der Annahme über die gewohnten Ordnungsrelationen müssen die Schülerinnen und Schüler auch von der Annahme, dass eine Subtraktion immer verkleinert, wie es sich auf Grund von Erfahrungen mit den positiven rationalen Zahlen eingeprägt hat, weggeführt werden. Es sollte ihnen klar gemacht werden, dass die Subtraktion mit einer negativen Zahl sogar immer zu einer Vergrößerung führt.

Gerade bei den negativen Zahlen und den Operationen mit ihnen scheint es enorm wichtig zu sein, dass die Schülerinnen und Schüler ein sicheres inhaltliches Verständnis aufbauen, da im Umgang mit diesen Zahlen doch häufig Irritationen auftreten können, wie beispielsweise bei der Aufgabe $(-5) — (-7) = 2$. Hier können sich die Kinder oft schwer vorstellen, wie lauter Minuszeichen auf der linken Seite zu einem positiven Rechenergebnis auf der rechten Seite führen können. Dies bedeutet in der Konsequenz, dass die Schülerinnen und Schüler erst einmal eine gewisse Zeit brauchen, um sich an die negativen Zahlen und ihre internen Gesetze zu gewöhnen (Hefendehl-Hebeker; Prediger 2006, S. 5).

# 4. Anschauliche Modelle zur Einführung der Rechenregeln

In diesem Kapitel werden verschiedene Modelle zur Herleitung und Veranschaulichung der Rechenregeln für das Rechnen mit negativen Zahlen vorgestellt. Modelle bieten durch ihre Anschaulichkeit den Vorteil, dass die Schülerinnen und Schüler sich spielerisch, visuell oder enaktiv mit den Rechenregeln beschäftigen, wodurch der Lernprozess eine nachhaltigere Wirkung hat. Bei einzelnen Modellen wird des Weiteren ein Bezug zum Alltag und damit die direkte Verbindung von Mathematik und dem Leben hergestellt. Besonders für lernschwache Schülerinnen und Schüler, denen abstrakte Einführungen schwer fallen, sind solche Veranschaulichungen hilfreich.

Wir werden versuchen in diesem Kapitel und auch in der Thesendiskussion auf Vor- und Nachteile einiger Modelle einzugehen. Durch konkrete Klassensituationen können natürlich weitere Vor- und Nachteile entstehen, weshalb wir in dieser Ausarbeitung nur einige Anregungen geben möchten.

## 4.1 Modelle für die Addition und Subtraktion

In diesem Unterkapitel werden Modelle für die Addition und Subtraktion vorgestellt. Sie dienen als Anregung und können je nach Klasse angewendet oder auch variiert werden. In Kapitel 5 wird dann eine Unterrichtseinheit beschrieben, in der alle drei Modelle verwendet werden.

Zunächst werden die Rechenregeln genannt, so wie sie in den meisten Schulbüchern zu finden sind.

***Rechenregeln für die Addition und Subtraktion***

*Addition*

Mit gleichem Vorzeichen (VZ):

- Addiere die Beträge.
- Gib dem Ergebnis das gemeinsame VZ.

Mit verschiedenem VZ:

- Subtrahiere den kleineren vom größeren Betrag.
- Gib dem Ergebnis das VZ der Zahl mit dem größeren Betrag.

*Subtraktion*

Eine rationale Zahl wird subtrahiert, indem die Gegenzahl addiert wird.

### 4.1.1 Das Additionsnomogramm

Das Additionsnomogramm besteht aus 3 parallelen Leitern, die jeweils den gleichen Abstand zueinander haben. Jede der Geraden ist eine Zahlengerade, wobei der Nullpunkt aller drei Geraden auf einer Höhe ist.

Der Maßstab auf der mittleren Leiter ist halb so groß gewählt wie auf den äußeren Leitern. Mit diesem Nomogramm lässt sich die Summe zweier Zahlen $a$ und $b$ dadurch ermitteln, dass man ein Lineal gemäß Abbildung 1 anlegt. Eine Begründung dieses Verfahrens ergibt sich daraus, dass, wie man direkt sieht, $c = 2a* = a* + a*$ ist und $a* - a = b - a*$ gilt. Aus beidem zusammen folgt $c = 2a* = a + b$.

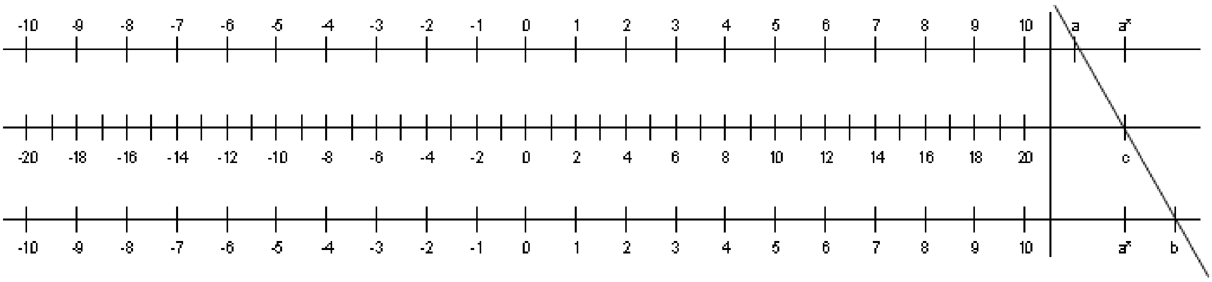



**Abbildung 1: Additionsnomogramm**

Wie der Name schon sagt ist das Additionsnomogramm für die Subtraktion von negativen Zahlen eher ungeeignet. Es lässt sich in dem Sinne dafür verwenden, dass bekannt ist, dass die Subtraktion das rückgängig macht, was die Addition gemacht hat.

### 4.1.2 Das Doppelturmmodell

Bei diesem Modell werden aus schwarzen und weißen Steinen Doppeltürme gebaut, wobei es sich um eine positive Zahl handelt, wenn die schwarzen Steine überwiegen und um eine negative, wenn der Turm mehr weiße Steine hat. Der Betrag der Zahl ergibt sich aus der Differenz der Beträge der beiden Türme (siehe Abbildung 2).

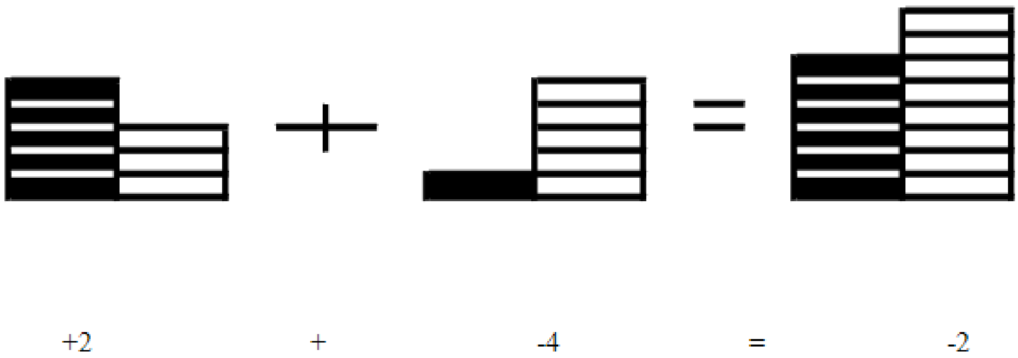



**Abbildung 2: Doppelturmmodell**

Bei diesem Modell sollte mit den Schülern thematisiert werden, dass es zu jeder Zahl unendlich viele Repräsentanten gibt.

Wichtig: Für eine Subtraktionsaufgabe ist es notwendig, dass der Turm, der den Minuenden repräsentiert groß genug ist, damit der Turm des Subtrahenden von dem Minuenden weggenommen werden kann.

### 4.1.3 Das Schrittmodell

Bei diesem Modell können die Schülerinnen und Schüler die Rechenaufgaben selber ablaufen und so zu dem richtigen Ergebnis kommen. Dazu wird auf dem Fußboden eine Zahlengerade mit Tesakreppband aufgeklebt wobei die Markierung von -10 bis +10 gehen.

Eine Schülerin oder ein Schüler steht an Position „Null" mit Blickrichtung zu den positiven Zahlen.

Es gibt 2 Vorgehensweisen: 1. Bei einer positiven Zahl geht man vorwärts,
2. bei einer negativen Zahl läuft man rückwärts.

Bei der Addition wird beides einfach hintereinander ausgeführt.

Das Ergebnis ist die Zahl an derer Position die Schülerin oder der Schüler am Ende steht (siehe Abbildung 3).

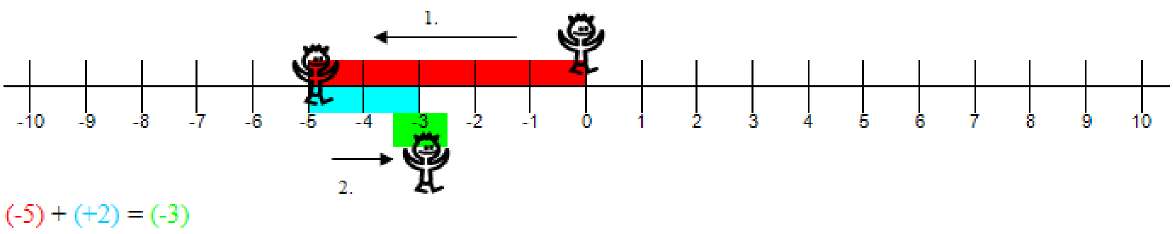



**Abbildung 3: Schrittmodell**

Bei der Subtraktion wird nach der Ausführung der ersten Zahl eine 180° Drehung durchgeführt und danach die zweite Zahl ausgeführt.
Mithilfe des Schrittmodells lässt sich leicht veranschaulichen, dass eine negative Zahl subtrahiert wird, indem die Gegenzahl addiert wird. Dies führt man durch, indem man beide Aufgaben parallel durchführt. Einmal die Aufgabe als Summe und einmal als Differenz. Das Ergebnis ist das Gleiche.

## 4.2 Modelle für die Multiplikation und Division

Nachdem nun die Rechenregeln und Modelle für die Addition und Subtraktion mit rationalen Zahlen vorgestellt wurden, werden im Folgenden Rechenregeln und Modelle für die Multiplikation aufgeführt und erklärt.

***Rechenregeln für die Multiplikation und Division***

<u>Mit gleichem VZ:</u>

- Multipliziere/ Dividiere die Beträge.
- Das Ergebnis ist positiv.

<u>Mit verschiedenem VZ:</u>

- Multipliziere /Dividiere die Beträge.
- Das Ergebnis ist negativ.

### 4.2.1 Das Schuldscheinspiel

(Winter 1991, S.146f)
Das Schuldscheinspiel kann individuell gestaltet werden. Ein Beispiel wäre: man benötigt eine Schülerin oder einen Schüler, der den Bankhalter spielt. Dieser erhält Schuldscheine und Gutscheine von je 50€ Wert (Spielgeld etc.). Des Weiteren bereitet man zwei Urnen vor. In der ersten befinden sich 10 grüne Kugel mit der Aufschrift „+1 bis +10“, 10 rote Kugeln mit der Aufschrift „-1 bis -10“ sowie eine weiße Kugel mit der Aufschrift „0“. In der zweiten Urne befinden sich zwei Kugeln, eine mit der Aufschrift „50€ Gutschrift“ und die andere mit der Aufschrift „50€ Lastschrift“.

Nun kann partnerweise gespielt werden, oder die eine Hälfte der Klasse gegen die andere. Je Gruppe sollte aber ein Bankhalter vorhanden sein, um ein fließenden Spielverlauf zu garantieren. Im Folgenden wird nun von den Parteien A und B gesprochen. Beide starten mit einem ausgeglichenen Konto, der Kontostand beträgt also 0€. Abwechselnd kann nun jeder je eine Kugel aus beiden Urnen ziehen, welche wieder zurückgemischt werden müssen. Folgendes wird sich dann beispielsweise ergeben:

| | |
|---|---|
| $(+3)(+50€)$ | Du bekommst (vom Bankhalter) 3 Gutscheine von je 50€, du wirst um 150€ reicher. |
| $(-3)(+50€)$ | Du gibst 3 Gutscheine von je 50€ (an den Bankhalter) ab, du wirst um 150€ ärmer. |
| $(+3)(-50€)$ | Du bekommst (vom Bankhalter) 3 Schuldscheine von je 50€, du wirst um 150€ ärmer. |
| $(-3)(-50€)$ | Du gibst 3 Schuldscheine von je 50€ (an den Bankhalter) ab, du wirst um 150€ reicher. |

Wer nun nach einer vereinbarten Anzahl von Spielzügen am meisten Geld hat, hat gewonnen. Wer zufällig noch keine Scheine hat aber welche abgeben muss, muss sich vom Bankhalter welche geben lassen. Dabei gilt aber die „Entgegengesetztheit". Er bekommt in der Anzahl gleich viele Schuld- und Gutscheine, z.B.: $3 \cdot (+50€) + 3 \cdot (-50€) = 0$.

Die bisherige Vorstellung des Addierens als eines Nehmens und des Subtrahierens als eines Abgebens kann hier in gewisser Weise erhalten bleiben, die Andeutung einer Doppelbeziehung als ein Produkt könnte entdeckt werden, wobei wie bisher der erste Faktor

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(-3)$ | $(-50€)$ | $=$ | $(+150€)$ |
| abgeben, | Schuldschein | | Ergebnis: |
| 3 Stück | von 50€ | | reicher werden um 150€ |

als Multiplikator die aktive Rolle spielt, die Kontostandsänderung handgreiflich vollzogen und ihre Ergebnisse mit leiblichen Augen geschaut werden.

Das Spiel sollte nicht nur gespielt, (das auf jeden Fall zuerst), sondern auch durchdacht werden: Wie kann es für A nach einem Zug, nach zwei Zügen stehen? Findest du alle Möglichkeiten? - Kann man in drei Zügen um 1000€ ärmer/reicher werden? Wie? – Wie kann man nach zwei Zügen wieder beim selben Stand sein? – Welcher Zug macht (-9), (+50€) rückgängig, welcher Zug bewirkt dasselbe? – usw.

### 4.2.2 Flächeninhalte und mathematische Drehsinne

(Wurl 2006)

Weitere Voraussetzungen für dieses Model:

Flächenberechnung eines Rechtecks; Mathematische Drehsinne; Koordinatensystem

Aus früherem Unterricht wissen die Schülerinnen und Schüler, dass bei der Bezeichnung eines Punktes in einem Koordinatensystem zuerst der x-Wert, dann der y-Wert angegeben wird. Wir betrachten das Produkt $a \cdot b$ zweier ganzer Zahlen als ein Punktepaar $(a\,;\,b)$. Der erste Faktor wird also an der x-Achse und der zweite an der y-Achse abgetragen. Das Ergebnis des Produkts hat als Betrag den Wert des Flächeninhalts des daraus entstehenden Rechtecks. Die Frage des Vorzeichens wird geklärt, indem man überlegt, ob man den Umfang im mathematisch positiven (+) oder negativen (-) Sinne abläuft (siehe Abbildung 4).

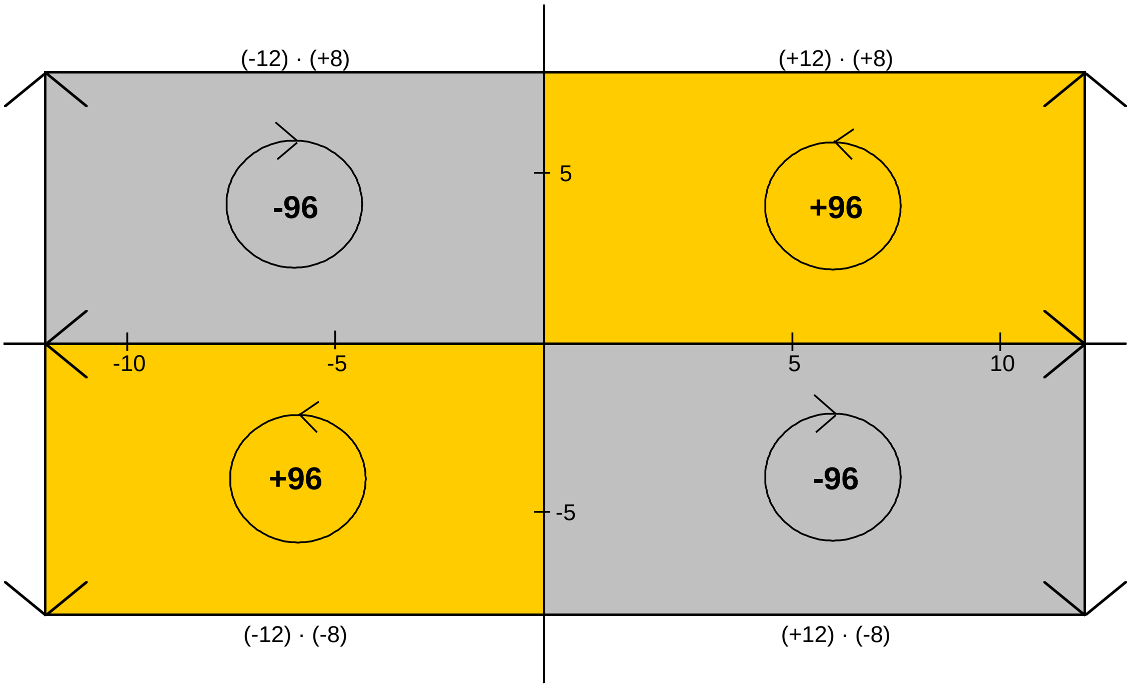



**Abbildung 4: Der mathematische Drehsinn**

Dieses Modell ist für die direkte Erklärung der Rechenregeln sehr wertvoll, da für die Berechnung des Flächeninhalts die Beträge der Zahlen multipliziert werden. Die Vorgabe des Vorzeichens wird dann durch den Drehsinn erklärt. Genau nach diesem Prinzip werden die Rechenregeln, die am Anfang dieses Kapitels dargelegt sind, in den meisten Schulbüchern beschrieben.

### 4.2.3 Die Hilbert'sche Streckenmultiplikation

(Faktor 7 2006, S.75)

Weitere Voraussetzungen für dieses Model:

Koordinatensystem; Zeichnen von Parallelen; Strahlensätze für den Beweis

Berechnung des Produktes $a \cdot b$ mit Hilfe der Hilbert'schen Streckenmultiplikation:

1. Markiere den Punkt $B = (b\,;\,0)$ auf der x-Achse
2. Verbinde den markierten Punkt mit der Stelle 1 auf der y-Achse. Die Strecke heißt s.
3. Markiere die Stelle $A = (0\,;\,a)$ auf der y-Achse.
4. Zeichne durch den markierten Punkt die Parallele g zu s.
5. g schneidet die x-Achse an der Stelle $a \cdot b$.

Dies gilt für alle ganzen Zahlen $a$ und $b$. (Siehe Abbildung 5 erstellt mit Cinderella)

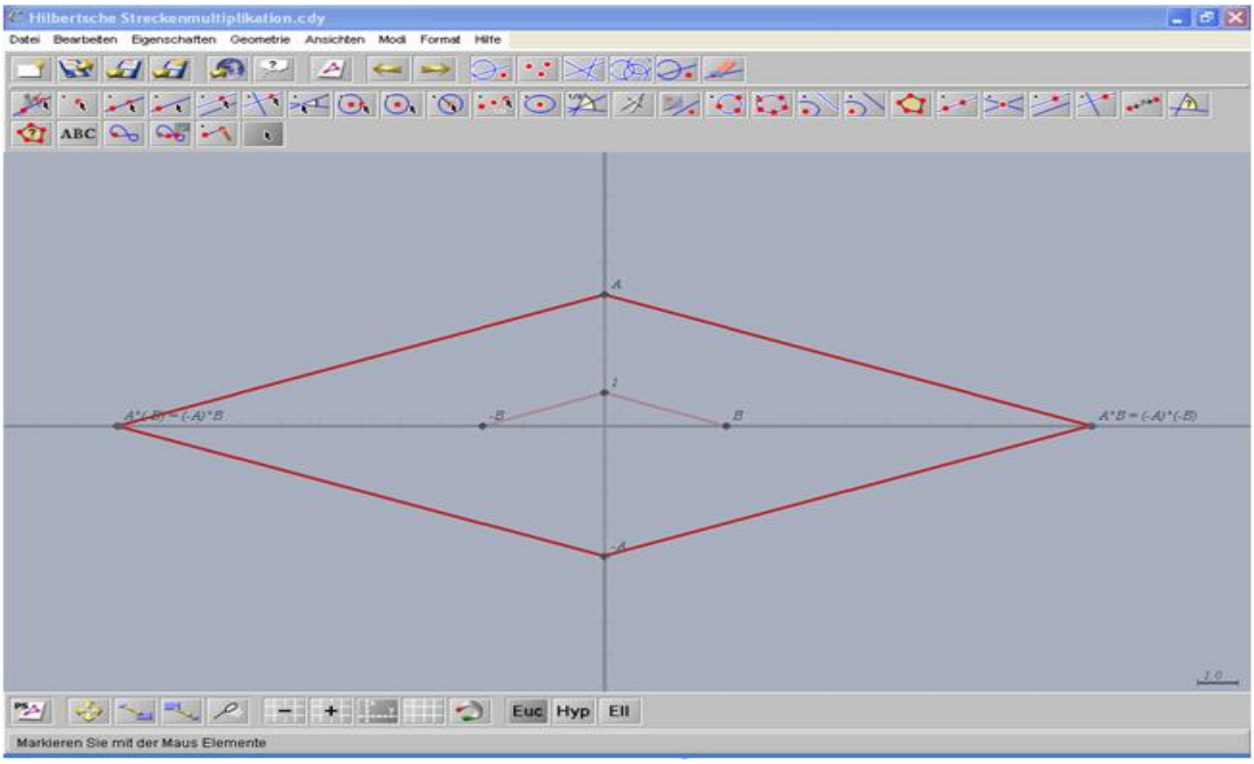



**Abbildung 5: Hilbert'sche Streckenmultiplikation**

Begründung:
Dass der Punkt 5. wirklich gilt, lässt sich leicht beweisen. Als Hilfsmittel verwendet man den Strahlensatz. Es gilt:

$$\frac{b}{1} = \frac{?}{a}$$

$$\frac{(a \cdot b)}{1} = ?$$

$$a \cdot b = ?$$

Analog gilt dies natürlich für $a \cdot (-b)$; $(-a) \cdot b$ und $(-a) \cdot (-b)$.

### 4.2.4 Pfeilmodell

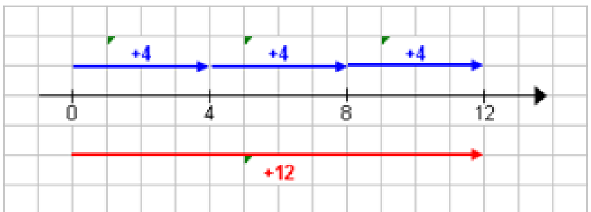
(Elemente der Mathematik 2006, S. 128-131)
Bei dem Pfeilmodell müssen unterschiedliche Fälle erklärt werden.

Fall 1: Der zweite Faktor ist positiv oder null

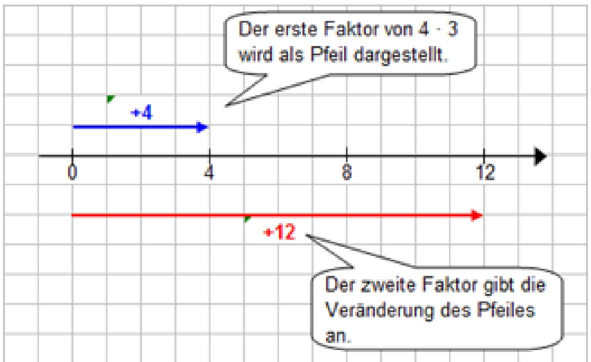
Ein Einführungsbeispiel: Frau Müller muss für eine Feuerversicherung vierteljährig einen Betrag von 57€ zahlen, der von ihrem Konto abgebucht wird. Wie viel Euro beträgt die Abbuchung in einem Jahr? In einem Jahr werden also insgesamt 228€ abgebucht.
Wie bei den natürlichen Zahlen wollen wir das wiederholte Addieren einer Zahl als Vervielfachen dieser Zahl mit einer natürlichen Zahl auffassen:

$$(-57) + (-57) + (-57) + (-57) = (-57) \cdot 4$$

Auf der Zahlengeraden können wir ein Produkt wie $4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4$ auf zwei Weisen deuten:



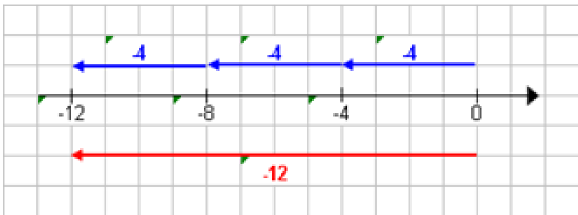

3 Pfeile für 4 werden aneinandergelegt



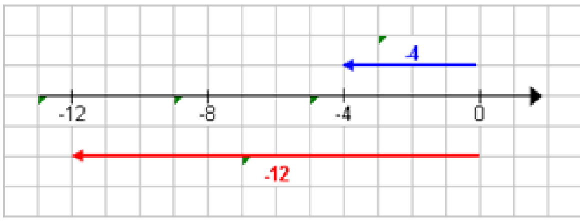

Die Länge des Pfeils wird verdreifacht.
Wir sagen auch: Der Pfeil für 4 wird mit dem Faktor 3 gestreckt.

**Abbildung 6: Pfeilmodell a)**

Aufgabe: $(-4) \cdot 3 = (-4) + (-4) + (-4) = -12$




3 Pfeile für -4 werden aneinandergelegt




Der Pfeil für -4 wird mit dem Faktor 3 gestreckt. Die Pfeilrichtung bleibt bestehen.

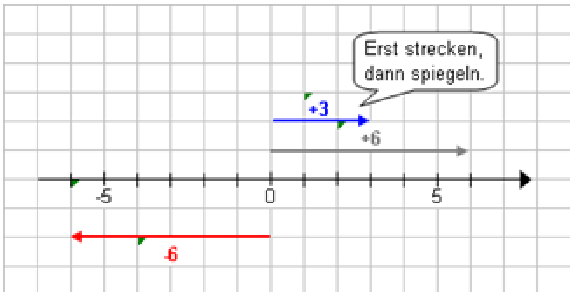
**Abbildung 7: Pfeilmodell b)**

<u>Fall 2: Der zweite Faktor ist negativ</u>

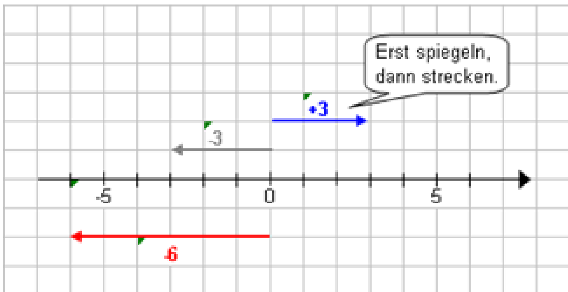
Einführung: Es gilt: $(-2) \cdot (+3) = -6$. Was aber bedeutet $(+3) \cdot (-2)$? Dazu vereinbaren wir: Das Kommutativgesetz soll auch für die Multiplikation ganzer Zahlen gelten:

$$(+3) \cdot (-2) = (-2) \cdot (+3) = -6.$$

Auch bei der Multiplikationsaufgabe $(+3) \cdot (-2)$ wollen wir den ersten Faktor $(+3)$ als Pfeil darstellen und den zweiten Faktor $(-2)$ als Veränderung des Pfeils. Wie erhält man dann am Zahlenstrahl aus dem Pfeil für $+3$ den Pfeil für $-6$? Das kann auf zwei Weisen geschehen:




1. Weg: Der Pfeil für +3 wird zunächst mit dem Faktor 2 gestreckt und dann am Nullpunkt gespiegelt (umgewendet).

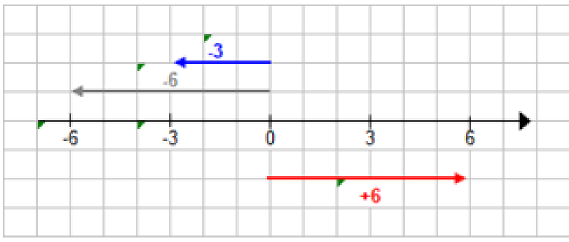



2. Weg: Der Pfeil für +3 wird zunächst am Nullpunkt gespiegelt (umgewendet) und dann mit dem Faktor 2 gestreckt.

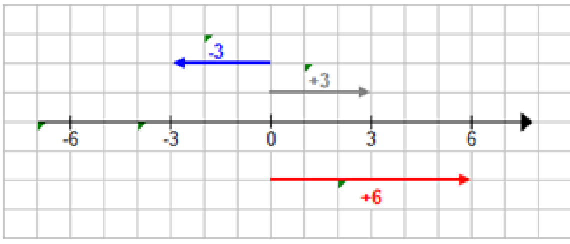
**Abbildung 8: Pfeilmodell c)**

Wir sagen kurz: Es wird ein Strecken am Nullpunkt mit Richtungsumkehrung durchgeführt.

Aufgabe: $(-3) \cdot (-2) = +6$




1. Weg: Strecken mit dem Faktor 2, dann Spiegeln am Nullpunkt.




2. Weg: Spiegeln am Nullpunkt, dann Strecken mit dem Faktor 2.

**Abbildung 9: Pfeilmodell d)**

### 4.2.5 Permanenzreihen


**Abbildung 10: Permanenzreihen (Quelle: Faktor 7 2006, S.75)**

Eine weitere mathematische Methode, den Schülerinnen und Schülern die Rechenregeln der ganzen Zahlen näher zu bringen, sind die Permanenzreihen. Sie basieren, wie der Name schon sagt, auf dem Permanenzprinzip, welches besagt dass bei Erweiterungen eines Zahlbereiches die formalen Rechengesetze des Ausgangsbereiches nach Möglichkeit auch im erweiterten Bereich gelten sollen. Dieses Prinzip von der Erhaltung der Rechengesetze wurde explizit 1867 von Hermann Hankel formuliert.

Den Schülerinnen und Schülern ist die Multiplikation der natürlichen Zahlen bekannt. Daher können sie Aufgaben, wie $3 \cdot 3$ rechnen. Mit Hilfe dieses Wissens und dem Permanenzprinzip werden nun auch Aufgaben wie $(-2) \cdot 3$, $3 \cdot (-2)$ und $(-3) \cdot (-2)$ erklärt.

$$\begin{array}{rcrl}
3 \cdot 3 &=& 9 & \\
2 \cdot 3 &=& 6 & -3 \\
1 \cdot 3 &=& 3 & -3 \\
0 \cdot 3 &=& 0 & -3 \\
(-1) \cdot 3 &=& -3 & -3 \\
(-2) \cdot 3 &=& -6 & -3 \\
& \vdots & &
\end{array}$$

Auch hier gilt natürlich das Kommutativgesetz und somit gilt:

$(-2)\ \cdot\ 3\ =\ 3\ \cdot\ (-2)\ =\ -6.$

Den Schülerinnen und Schülern ist nun das Multiplizieren mit einem negativen Faktor bekannt.

Im Folgenden wird die Regel für das Multiplizieren mit zwei negativen Faktoren hergeleitet.

$$\begin{array}{rcrl}
3 \cdot (-2) &=& -6 & \\
2 \cdot (-2) &=& -4 & +2 \\
1 \cdot (-2) &=& -2 & +2 \\
0 \cdot (-2) &=& 0 & +2 \\
(-1) \cdot (-2) &=& 2 & +2 \\
(-2) \cdot (-2) &=& 4 & +2 \\
(-3) \cdot (-2) &=& 6 & +2 \\
& \vdots & &
\end{array}$$

# 5. Die Unterrichtseinheit

Dieses Kapitel stellt eine Unterrichtseinheit vor, die die Einführung der Rechenregeln für die Addition thematisiert. Die hier beschriebene Unterrichtseinheit ist eine Kurzfassung des Stundenentwurfes von Jenni Radermacher, der im Zusammenhang mit dem Seminar Planung, Gestaltung und Analyse von Mathematikunterricht im WS 2006/2007 bei Frau Risse entstanden ist.

Für die Unterrichtseinheit, die eine Doppelstunde bildet, werden die drei Modelle benutzt, die im Kapitel 4.1 vorgestellt wurden. Die Klasse wird in Gruppen von maximal 5 Schülerinnen und Schülern eingeteilt, was bei 30 Schülerinnen und Schülern 6 Gruppen ergibt. Da nur drei Modelle zur Verfügung stehen, bearbeiten stets zwei Gruppen das gleiche Modell. Die Arbeitsbögen, die den einzelnen Gruppen ausgeteilt werden, befinden sich im Anhang. Jede Gruppe erarbeitet sich das Modell, das ihnen zugeteilt wurde mit Hilfe des Arbeitsbogens. Am Ende der Gruppenarbeit werden alle Modelle von den Schülerinnen und Schülern in der Klasse vorgestellt. Dies soll in einem Stuhlhalbkreis erfolgen, dem gegenüber die Gruppe steht, die ihr Modell vorstellt. In der Vorstellungsphase sollen die anderen Schülerinnen und Schüler Fragen zu den Modellen stellen und diese verstehen. Dies ist wichtig, da unterschiedliche Schülerinnen und Schüler verschiede Auffassungsgaben haben und somit das Modell herausgreifen können, welches ihnen am Besten liegt. Des Weiteren ist das Verstehen aller Modelle wichtig, da alle Kinder für die Hausaufgabe alle Modelle verstanden haben müssen. Um dies zu gewährleisten, sollen Schülerinnen und Schüler der anderen Gruppen Beispielaufgaben mit Hilfe des Modells vorrechnen und erklären können.

Um das Wissen der Klasse zu sichern, abzufragen und zu überprüfen, werden zum Schluss der Stunde Hausaufgaben aufgegeben, die mit allen drei Modellen bearbeitet werden müssen (siehe Anhang).

# 6. Schulbuchvergleich

In diesem Kapitel werden die Struktur und die Reihenfolge der einzelnen Themenbereiche der negativen Zahlen von drei Büchern gegenübergestellt und kritisch analysiert.
Dieses Kapitel soll vor allem den Leser motivieren Schulbücher kritisch zu begutachten und nicht einfach ein Schulbuch zu wählen, welches dann im Unterricht genutzt und dessen Themenstruktur strikt abgehandelt wird. In der heutigen Zeit, in der Schulbücher von den Eltern selbst gekauft werden müssen, sollte der Lehrer in der Lage sein, seine Wahl für ein Schulbuch zu begründen und rechtfertigen zu können. Es ist demnach wichtig, dass die Lehrkraft bei der Wahl eines Schulbuches den Aufbau jeden Buches kritisch betrachtet und demnach das passendste auswählt.
Für unseren Schulbuchvergleich haben wir uns für die Bücher Mathematik Plus (2007), Faktor 7 (2001) und Schnittpunkt (2006) entschieden.

Auf den ersten Blick scheint die Struktur aller drei Bücher ähnlich zu sein, es gibt jedoch kleine, aber relevante Unterschiede, auf die wir genauer eingehen wollen.
Die grobe Struktur aller drei Bücher sieht wie folgt aus:

- Einführung mit Beispielen
- Zahlengerade
- **Gegenzahl, Betrag, Ordnung, Koordinatensystem**
- Addition/Subtraktion
- Multiplikation/Division

In dem fett markierten Teil **Gegenzahl, Betrag, Ordnung, Koordinatensystem** unterscheiden sich die Bücher immens.
Zunächst wird die Einordnung des Begriffes **„Ordnung“** in den ganzen Themenbereich diskutiert. Dazu betrachten wir alle drei Bücher, wobei die Bücher Faktor 7 und Schnittpunkt den gleichen Aufbau haben. In dem Buch Mathematik Plus werden nach der Zahlengeraden zunächst die Begriffe Gegenzahl, das Koordinatensystem und der Betrag eingeführt. Diese Reihenfolge ist in unseren Augen nicht sinnvoll, da die Ordnung unmittelbar mit der Zahlengeraden zusammenhängt und demnach in Verbindung mit dieser thematisiert werden sollte. Dies wird in den Büchern Faktor 7 und Schnittpunkt umgesetzt.

Als nächsten Punkt betrachten wir die Einführung des **„Koordinatensystems“**.
Im Buch Mathematik Plus wird das Koordinatensystem eingeführt, bevor der Begriff der Ordnung besprochen wurde. Diese Reihenfolge ist natürlich ebenfalls ungünstig, da die Ordnung sowohl für das Koordinatensystem eine Rolle spielt als auch für die Zahlengerade. Im Mathematikbuch Schnittpunkt wird das Koordinatensystem ohne Zusammenhang ganz ans Ende der Einheit der negativen Zahlen gestellt. Im Buch Faktor 7 wirkt die gewählte Reihenfolge sinnvoll. Zunächst werden die Begriffe Ordnung, Betrag und Gegenzahl eingeführt. Direkt im Anschluss und vor den Rechenregeln wird in diesem Schulbuch das Koordinatensystem eingeführt.
Zum Schluss ist uns vor allem im Buch Mathematik Plus die Reihenfolge der Begriffe **„Gegenzahl“ und „Betrag“** aufgefallen. In diesem Mathematikbuch werden die Begriffe durch zwei Unterkapitel getrennt. Da jedoch ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen Gegenzahl und Betrag besteht - denn laut Definition ist die Gegenzahl die Zahl, die den gleichen Betrag hat - erachten wir diese gewählte Reihenfolge als kritisch.

Da die Bücher nur in Bezug auf den Aufbau des Themenbereiches negative Zahlen und nicht in Bezug auf andere Themen oder auch auf die Auswahl von Aufgaben und Veranschaulichungen untersucht wurde, sollen die oben abgegebene Wertung nicht das ganze Buch für gut oder schlecht erklären. Es wird lediglich deutlich, dass eine genauere Betrachtung des Inhaltes eines Mathematikbuches notwendig ist, bevor dieses für eine bestimmte Klasse ausgewählt wird.

# 7. Thesendiskussion

Im Folgenden, werden wir die Ergebnisse der Thesendiskussion, die nach unserem Vortrag im Plenum stattgefunden hat kurz zusammenfassen.

***These 1****: In der Schule sollten so wie im Studium die negativen Zahlen vor den Brüchen behandelt werden.*

Diese These wurde von den Studentinnen und Studenten stark diskutiert und die Meinungen gingen teilweise stark auseinander. Als Argumente für die jetzige Vorgehensweise, die zunächst die Einführung der positiven rationalen Zahlen vorsieht, haben einige Kommilitonen genannt, das der Bezug zu Bruchzahlen in der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler größer ist und diese demnach auch als erstes eingeführt werden sollten. Des Weiteren wäre es schwer die Rahmenlehrpläne aller Bundesländer zu ändern, alle Schulbücher neu zu konzipieren und zu drucken und auch den jetzigen Lehrkräften eine Vorgehensweise vorzugeben. Für die Einführung der negativen ganzen Zahlen vor der Einführung der Bruchzahlen spricht laut einiger Studentinnen und Studenten, dass die negativen Zahlen als Gegenzahlen zu den natürlichen Zahlen naheliegender und verständlicher für die Schülerinnen und Schüler sind. Des Weiteren wurde genannt, dass die Rechneregeln und die Ordnung der negativen Zahlen für die Kinder leichter zu verstehen wären, und generell bei deren Einführung auch bei der jetzigen Vorgehensweise meist ganze Zahlen und selten Bruchzahlen genutzt werden. Dies würde wieder für die Einführung der negativen Zahlen vor den Bruchzahlen sprechen. Ein letztes Argument für diese Vorgehensweise war, dass die uneingeschränkte Subtraktion zunächst wichtiger wäre, als die uneingeschränkte Division, da den Schülerinnen und Schülern zur Not auch das Teilen mit Rest zur Verfügung steht. Dies spiegelt auch die Diskussionen der Fachdidaktiker wider, die sich ebenfalls über die Reihenfolge der Zahlbereichserweiterungen in der Schule nicht ganz einig sind.

***These 2****: Alle Modelle spiegeln die mathematischen Operationen korrekt wider.*

Einig waren sich die Studentinnen und Studenten, dass die Modelle generell sehr anschaulichen sind und ein großer Pool von Modellen für die Lehrkräfte sehr wertvoll ist, sodass man sich jederzeit für seine Lerngruppe das oder die geeigneten Modelle herausgreifen kann. Angemerkt wurde, dass zum Beispiel das Additionsnomogramm zwar sehr schön wäre, das Zeichnen aber zu aufwendig wäre und es schwierig wäre, den Beweis mit den Schülerinnen und Schülern zu machen. Es wurde vorgeschlagen, dass man in den höheren Klassenstufen noch einmal auf den Beweis des Additionsnomogramms und ebenso auf den der Hilbert'schen Streckenmultiplikation zurück kommen könnte und so den Schülerinnen und Schülern zeigen könnte, dass die in der Vergangenheit angewendeten Modelle auch ihre mathematische Richtigkeit haben. Wie vielleicht schon an diesen Ausführungen deutlich wird, war die These eventuell nicht deutlich genug gestellt, so dass nur durch Hinweise unsererseits das Plenum auf die Widerspieglung der mathematischen Operationen eingegangen ist. Dabei kam heraus, dass einige Modelle, wie beispielsweise das Schuldscheinspiel und das Pfeilmodell auf einer höheren Ebene nicht die mathematischen Operationen wiederspiegeln. Beim Schuldschein spiel wird durch die zwei Zahlen (-3) und (-50€) nicht die Rechenaufgabe (-3)·(-50) widergespiegelt, sondern durch das Abgeben von drei Schuldscheinen entspricht dies eher der Aufgabe -(3·(-50)).

***These 3****: Die Modelle sind den Permanenzreihen vorzuziehen, da sie die Schüler spielerisch an das Thema heranführen.*

Hier war der Konsens des Plenums, dass man weder auf die anschaulichen Modelle noch auf die Permanenzreihen verzichten sollte, da jede Schülerinnen und jeder Schüler auf eine andere Art und Weise lernt und man durch ein breites Angebot mehr Kinder erreichen kann. Jedoch muss man natürlich die jeweilige Klassensituation in seine Stundenplanungen genau mit einbeziehen. Man sollte beachten, was die Schülerinnen und Schüler vielleicht schon kennen oder wie sie generell auf spielerische Elemente und Modelle in der Vergangenheit reagiert haben, und dann die Modelle der jeweiligen Situation anpassen. Dies scheint besonders vor dem Hintergrund, dass zu viele Modelle die Schülerinnen und Schüler auch überfordern könnten, wichtig zu sein.

# 8. Fazit

Durch die Beschäftigung mit diesem Thema ist uns klar geworden, dass Zahlbereichserweiterungen Kernthemen in der Schulmathematik darstellen, welche für die Schülerinnen und Schüler eine enorme Herausforderung bedeuten. Für die Einführung der jeweiligen Zahlbereiche gibt es eine Reihe von Gründen, die sowohl in der Mathematik selbst als auch in der Lebensumwelt der Schülerinnen und Schüler liegen. Jedoch ist auch auffällig, dass jede Zahlbereichserweiterung Änderungen mit sich bringt, da jeder Zahlbereich seinen eigenen Gesetzen und Rechenregeln unterliegt. Dadurch treten im Umgang mit ihnen häufig Probleme auf, die es gilt, durch eine anschauliche und intensive Behandlung mit den „neuen" Zahlen und ihren Rechenoperationen, zu beseitigen. Dafür ist es von enormer Bedeutung, dass die Lehrkräfte sich den häufigen Fehlerquellen und Problemen der Schülerinnen und Schüler bewusst werden und sich dadurch adäquat und gewissenhaft auf die Probleme einstellen können. Eine anschauliche Vorstellung von den Rechenoperationen der negativen Zahlen scheint eine weitreichende Bedeutung für das Verständnis der Schülerinnen und Schüler zu haben und kann durch eine Anzahl von Modellen erreicht werden. Dabei sollte die Lehrkraft jedoch jedes Modell auch kritisch hinterfragen und das passende Modell bzw. die passenden Modelle für ihre Klasse herausgreifen.

Der Schulbuchvergleich hat uns des Weiteren verdeutlicht, dass wir als angehende Lehrerinnen und Lehrer jedes Schulbuch, was uns eventuell von der Schulleitung bzw. der Fachbereichsleitung vorgegeben wird, kritisch auf seine Tauglichkeit untersuchen sollten. Auch wenn die grobe Struktur der Schulbücher oft gleich ist, sind doch relevante Unterschiede in der Feingliederung aufzufinden. Das heißt jede Lehrkraft sollte sich darüber Gedanken machen, ob die jeweilige Reihenfolge im Schulbuch logisch aufgebaut ist und übernommen werden kann, oder ob man sie ändern sollte.

Insgesamt scheint eine intensive Beschäftigung der Lehrkräfte mit dem Thema der Zahlbereichserweiterungen von enormer Bedeutung zu sein, um den Schülerinnen und Schülern die Beschäftigung mit den „neuen" Zahlen möglichst logisch und einfach zu machen.

# Literaturverzeichnis

Elemente der Mathematik (2006) – Berlin - 7. Schuljahr. Schroedel Verlag Berlin

Faktor 7 (2001): Mathematik. Schroedel Verlag Berlin

Faktor 7 (2006): Mathematik. Schroedel Verlag Berlin

Hefendehl – Hebeker, L.; Prediger, S.(2006): Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln. In: Praxis der Mathematik in der Schule Heft 11/ Oktober 2006/ 48. Jg., S. 1-7

Kirsch, A (1987).: Mathematik wirklich verstehen, Aulis Köln

Mathematik Plus (2007) - Gymnasium Klasse 7. Volk und Wissen Verlag Berlin

Padberg, F.: Danckwerts, R.; Stein, M. (1995): Zahlbereiche – Eine elementare Einführung. Spektrum Akademischer Verlag Berlin

Rahmenlehrplan für die Grundschule Mathematik (2006). Berlin

Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I (2006), Jahrgangsstufe 7 – 10, Hauptschule, Realschule, Gesamtschule, Gymnasium Mathematik. Berlin

Schnittpunkt Mathematik (2006) – 7. Schuljahr. Ernst Klett Verlag Stuttgart

Winter, Heinrich (1991): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht, Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Hrsg. von Erich Ch. Wittmann, 2. verb. Aufl., Braunschweig

Wurl, Bernd (2006): Einführung in die Mathematikdidaktik, Vorlesung an der FU Berlin im SS06

# Anhang

(Arbeitsbogen 1)

## Gruppe 1: Das Schrittmodell

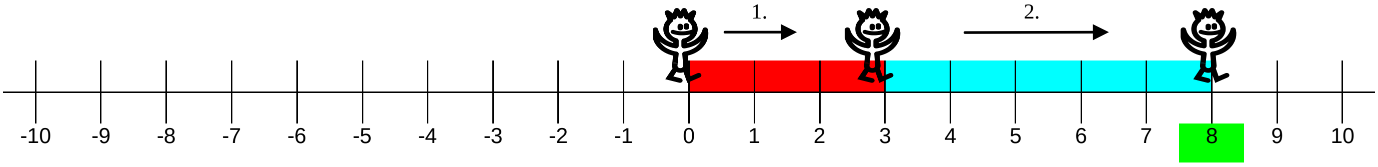
Eure Aufgabe ist es mit Hilfe des Schrittmodells Additionsaufgaben mit negativen Zahlen zu lösen. Dazu habe ich euch mit Tesakrepp eine Zahlengerade auf den Fußboden geklebt, mit der ihr arbeiten sollt.
Guckt euch dazu zunächst die Beispielaufgaben an, probiert selbst 2 Aufgaben pro Person, füllt den Lückentext und löst anschließend mit Hilfe des Schrittmodells unten stehende Aufgaben.
Anschließend soll das Modell euren Klassenkameraden vorgestellt werden.

### I. Beispiele:

Aufgabe 1: (+3) + (+5) =

Arbeitsauftrag:

Starte bei der „0“ mit Blickrichtung zu den positiven Zahlen.
Für die positive Zahl +3 laufe 3 Schritte vorwärts, für die positive Zahl +5 gehe anschließend 5 Schritte vorwärts.
Wo stehst du jetzt?

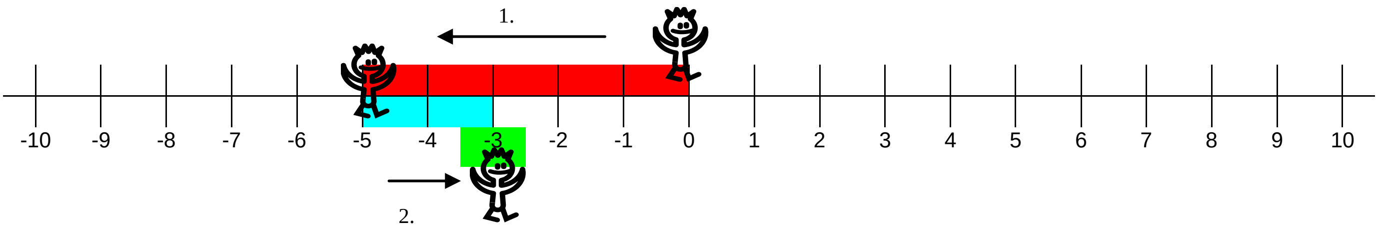



(+3) + (+5) = (+8)

Aufgabe 2: (-5) + (+2) =

Arbeitsauftrag:

Starte bei der „0“ mit Blickrichtung zu den positiven Zahlen.
Für die negative Zahl -5 lauf 5 Schritte rückwärts, für die positive Zahl +2 geh anschließend 2 Schritte vorwärts.
Wo stehst du jetzt?




(-5) + (+2) = (-3)

## II. Ausprobieren:

Jedes Gruppenmitglied löst nun durch gleiches Verfahren 2 unterschiedliche Aufgaben:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (+5) + (+2) = | (+4) + (+4) = | (+8) + (+1) = | (+2) + (+7) = |
| (+1) + (-3) = | (+5) + (-3) = | (-8) + (+5) = | (-6) + (+9) = |

## III. Regeln:

Füllt die Lücken richtig aus.

1. Wir starten immer bei der Zahl ____. Mit Blick zu den ______________ Zahlen.
2. Für positive Zahlen laufen wir immer ________________.
3. Für negative Zahlen laufen wir immer ________________.

## IV. Aufgaben:

Rechnet nun folgende Aufgaben mit Hilfe des Schrittmodells.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (-2) + (+3) = | (-1) + (-9) = | (-7) + (-2) = | (-3) + (-5) = |
| (+4) + (-6) = | (-3) + (+7) = | (-2) + (+1) = | (-1) + (-1) = |
| (-5) + (-2) = | (+5) + (-1) = | (+8) + (-9) = | (-8) + (+2) = |

## V. Vorbereitung für den Vortrag:

Überlegt euch, wie ihr das Modell den anderen Mitschülern am Besten erklären könnt, so dass diese anschließend in der Lage sind Aufgaben mit Hilfe dieses Modells zu lösen.
Wählt einen Gruppenleiter, der eure Lösung den Mitschülern präsentiert.

(Arbeitsbogen 2)

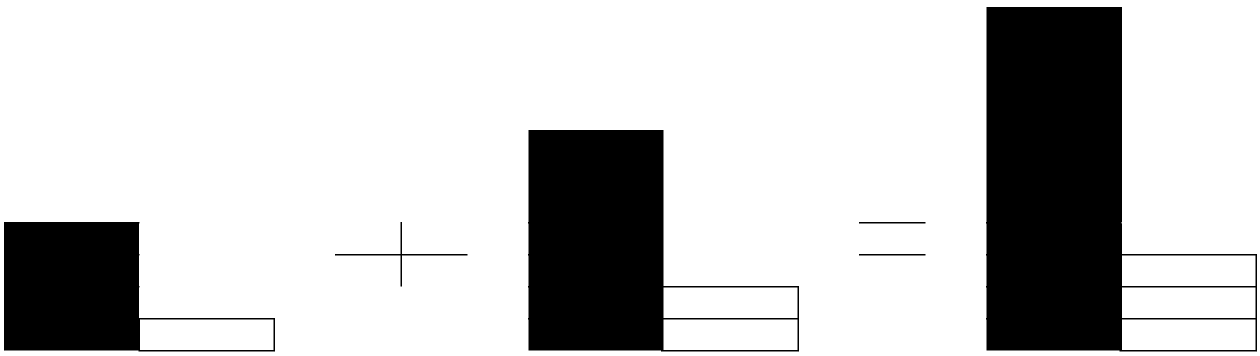
# Gruppe 2: Das Doppelturmmodell

Eure Aufgabe ist es mit Hilfe des Doppelturmmodells Additionsaufgaben mit negativen Zahlen zu lösen. Dazu bekommt ihr schwarze und weiße Steine, mit denen ihr arbeiten sollt. Die Doppeltürme sind euch ja bereits von der letzten Schulstunde bekannt.
Guckt euch dazu zunächst die Beispielaufgabe an, und löst anschließend mit Hilfe des Doppelturmmodells unten stehende Aufgaben.
Nach der Gruppenarbeit soll das Modell euren Klassenkameraden vorgestellt werden.

## I. Beispiel:

Aufgabe: (+3) + (+5) =

1. Schritt: Erstelle 2 Doppeltürmchen für die Zahlen +3 und +5.
2. Schritt: Stelle nun jeweils die schwarzen und die weißen Steine der beiden Doppeltürme übereinander.
3. Schritt: Welche Zahl repräsentiert der neue Doppelturm?



+3 + +5 = +8

Wiederhole die Schritte 2 und 3, indem du andere Doppeltürme für die Zahlen +3 und +5 baust.
Erhältst du das gleiche Ergebnis?

## II. Aufgaben:

Rechnet nun folgende Aufgaben mit Hilfe des Doppelturmmodells.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (-2) + (+3) = | (-1) + (-9) = | (-7) + (-2) = | (-3) + (-5) = |
| (+4) + (-6) = | (-3) + (+7) = | (-2) + (+1) = | (-1) + (-1) = |
| (-5) + (-2) = | (+5) + (-1) = | (+8) + (-9) = | (-8) + (+2) = |

## III. Vorbereitung für den Vortrag:

Überlegt euch, wie ihr das Modell den anderen Mitschülern am Besten erklären könnt, so dass diese anschließend in der Lage sind Aufgaben mit Hilfe dieses Modells zu lösen.
Wählt einen Gruppenleiter, der eure Lösung den Mitschülern präsentiert.

(Arbeitsbogen 3)

# Gruppe 3: Das Additionsnomogramm

Dieser 1m lange Pappstreifen heißt Additionsnomogramm. Als Hilfsmittel braucht ihr ein Tafellineal.
Eure Aufgabe ist es mit Hilfe des Additionsnomogramms Additionsaufgaben mit negativen Zahlen zu lösen.
Guckt euch dazu zunächst die Beispielaufgabe an, löst mit Hilfe des Additionsnomogramms unten stehende Aufgaben und beantwortet anschließend die Fragen.
Am Ende der Gruppenarbeit soll das Modell euren Klassenkameraden vorgestellt werden.

## I. Beispiel:

Aufgabe: (+3) + (+5) =

Mit dem Nomogramm rechnet man folgendermaßen:

Suche die 3 auf der oberen Geraden, die 5 auf der unteren Geraden. Verbinde beide mit dem Lineal. Das Ergebnis der Aufgabe liest du auf der mittleren Gerade ab.

## II. Aufgaben:

Rechnet nun folgende Aufgaben mit Hilfe des Additionsnomogramm.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (-2) + (+3) = | (-1) + (-9) = | (-7) + (-2) = | (-3) + (-5) = |
| (+4) + (-6) = | (-3) + (+7) = | (-2) + (+1) = | (-1) + (-1) = |
| (-5) + (-2) = | (+5) + (-1) = | (+8) + (-9) = | (-8) + (+2) = |

## III. Beantwortet folgende Frage:

Welche Zahlengeraden sind gleich und was fällt euch bei der dritten auf?

Nehmt ein kariertes DinA4 Blatt quer und zeichnet das Additionsnomogramm in euer Heft.
Wählt dazu für die gleichen Zahlengeraden als Maßstab 1cm = 1 LE.

## IV. Vorbereitung für den Vortrag:

Überlegt euch, wie ihr das Modell den anderen Mitschülern am Besten erklären könnt, so dass diese anschließend in der Lage sind Aufgaben mit Hilfe dieses Modells zu lösen.
Wählt einen Gruppenleiter, der eure Lösung den Mitschülern präsentiert.

# Hausaufgaben

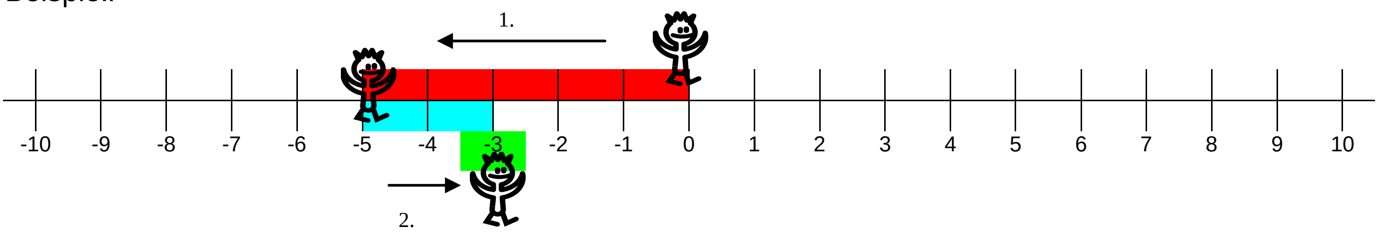
Aufgabe1: Schrittmodell

Fülle den Lückentext.

1. Beim Schrittmodell starten wir immer bei der Zahl _____. Mit Blick zu den _______________ Zahlen.
2. Für positive Zahlen laufen wir immer _________________.
3. Für negative Zahlen laufen wir immer _________________.

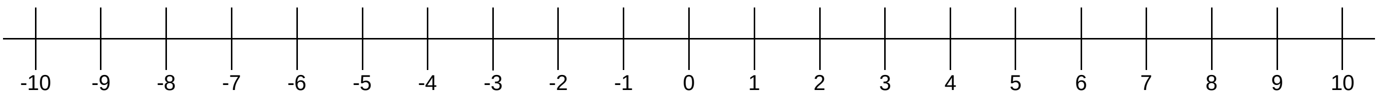
Löse folgende Aufgaben mit Hilfe des Schrittmodells. Trage deine Ergebnisse wie im Beispiel graphisch in das Diagramm unten ein.

Beispiel:

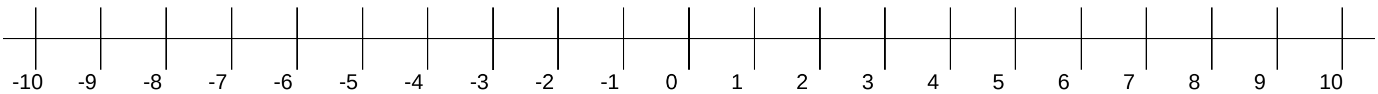



(-5) + (+2) = (-3)

a) (-7) + (-2) =




b) (+3) + (-9) =

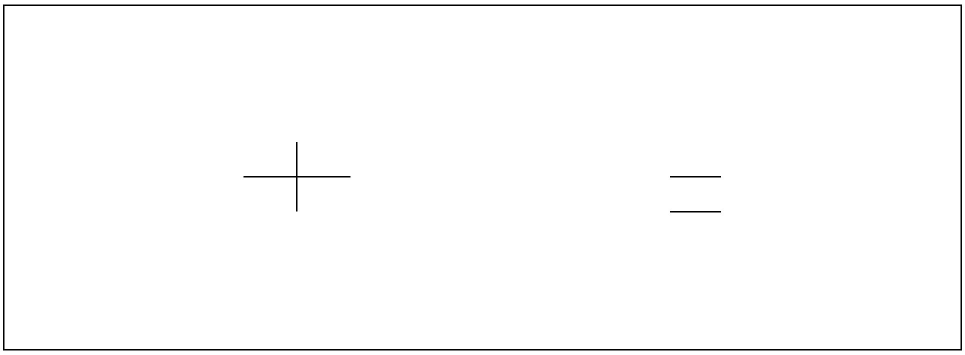



Aufageb2: Doppelturmmodell

Löse folgende Aufgaben mit Hilfe des Doppelturmmodells.

a) (+4) + (-7) =

b) (-3) + (-2) =

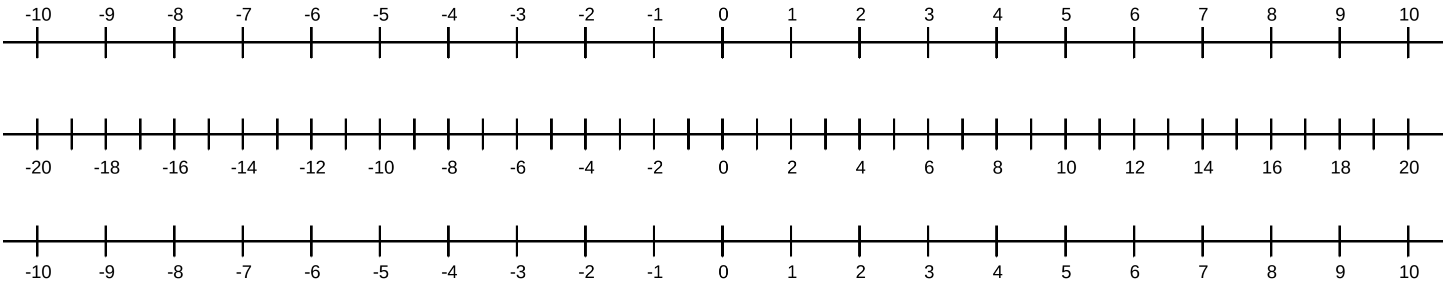



Aufgabe 3: Additionsnomogramm

Löse folgende Aufgaben mit Hilfe des Additionsnomogramms, indem du die Verbindungslinie wie im Beispiel auf den Extrazettel einzeichnest.

a) (+4) + (-7) =
b) (-6) + (-1) =

(Das Additionsnomogramm sollten den Schülern in einer größeren Kopie als DinA 4 zur Verfügung gestellt werden.)




Beispiel: a + b = c