Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Eva Naumann
Dr. Elke Warmuth
Institut für Mathematik

Wintersemester 2000/2001

Übungen zur Vorlesung
Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

1.1. Es seien A, B und C Ereignisse. Beschreiben Sie folgende Ereignisse durch Verknüpfungsoperationen:
a) A und B treten ein, nicht aber C,
b) alle drei Ereignisse treten ein,
c) nur A tritt ein,
d) höchstens eins der Ereignisse A, B und C tritt ein,
e) mindestens eins der Ereignisse A, B und C tritt ein,
f) es tritt entweder A oder B oder C ein,
g) es treten höchstens zwei der drei Ereigniss A, B, C ein.

1.2.* Eine zufällig ausgewählte Versuchsperson soll einen Fragebogen mit vier Alternativfragen ausfüllen. Es bezeichne A_k das Ereignis, daß die Frage mit „ja“ beantwortet wird, $k = 1, 2, 3, 4$. Man drücke folgende Ereignisse
A : „Es wird jede Frage mit „ja“ beanwortet.“
B : „Es wird keine Frage mit „ja“ beanwortet.“
C : „Es wird genau eine Frage mit „nein“ beanwortet.“
D : „Es wird mindestens eine Frage mit „ja“ beanwortet.“
E : „Es werden genau zwei Fragen mit „ja“ beanwortet.“
mit Hilfe der Ereignisse A_k und geeigneter Mengenoperationen aus.

1.3.* Ein technisches System bestehe aus drei Teilsystemen, die in einem betrachteten Zeitraum ausfallen können oder nicht.

a) Mit der Kodierung „0“ für Ausfall und „1“ für Nichtausfall gebe man einen geeigneten zufälligen Versuch Ω für die möglichen Zustände des Gesamtsystems an.
b) Für die zufälligen Ereignisse A : „Genau 2 Teilsysteme fallen aus“, B : „Das Teilsystem A_1 fällt aus“ bestimme man $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \bar{A}, \bar{B}$ als Teilmengen von Ω und formuliere verbale Beschreibungen für diese Ereignisse.
c) Man gebe die zufälligen Ereignisse
C : „Kein Teilsystem fällt aus.“
D : „Höchstens ein Teilsystem fällt aus.“
E : „Mindestens ein Teilsystem fällt aus.“
sowie $A \cap E, E \setminus B, B \cap C, B \cap D$ durch Aufzählung ihrer Elemente an.

1.4. Eine Münze wird geworfen, bis Wappen fällt, höchstens jedoch fünf mal. Es interessieren die Ereignisse
A : „Wappen fällt frühestens im 3. Wurf.“
B : „Wappen fällt nicht schon im ersten Wurf.“

a) Geben Sie einen geeigneten zufälligen Versuch Ω an.
b) Stellen Sie A und B als Teilmengen von Ω dar.
c) Bestimmen Sie $A \cup B$ und $A \cap B$.

1.5*. Es sei $A_1, A_2, ...$ eine Folge von Ereignissen. Man definiert neue Ereignisse:

$$B_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,\ C_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m,\ B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n,\ C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n.$$

a) Begründen Sie: $C_n \subseteq A_n \subseteq B_n$ für alle $n \geq 1$.

b) Begründen Sie: $B_n \supseteq B_{n+1},\ C_n \subseteq C_{n+1}$ für alle $n \geq 1$.

c) Begründen Sie:
$B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ für unendlich viele $n\}$
$C = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ für alle bis auf endlich viele $n\}$

Kontrollfragen zur Vorlesung

1. Was versteht man unter einem Ereignis, das mit einem zufälligen Versuch verbunden ist?

2. Wann gelten zwei Ereignisse als gleich?

3. Auf welche Weise kann man zwei zufällige Ereignisse A und B, die mit einem zufälligen Versuch verbunden sind, verknüpfen? Wann treten diese Ereignisse ein?