Dr. Elke Warmuth
Dr. Bernhard Gerlach
Institut für Mathematik

Wintersemester 2005/06

Übungen zur Vorlesung
Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung (L)

Bonus 1 (3 Punkte)
Die Bevölkerung von Nikosia besteht zu 75% aus Griechen und zu 25% aus Türken. 20% der Griechen und 10% der Türken sprechen Englisch. Ein Besucher trifft zufällig auf einen Einheimischen, der Englisch spricht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Grieche ist?

Bonus 2 (3 Punkte)
Ein 3-Personen-Basketballteam besteht aus einem „guard", einem „forward" und einem „center". Aus drei Mannschaften wird jeweils zufällig ein Spieler ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird auf diese Weise ein komplettes Team zusammengestellt?

Bonus 3 (4 Punkte)
Aus einer Kiste mit 5 blauen und 5 roten Kugeln werden zufällig zwei Kugeln entnommen. Falls diese von der gleichen Farbe sind, gewinnen Sie 1,10 Euro, andernfalls verlieren Sie 1 Euro. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Nettogewinns.

Bonus 4 (3 Punkte)
Ein guter Spielwürfel wird solange geworfen, bis jede Augenzahl mindestens einmal als Wurfergebnis erschienen ist. Sei X die Anzahl der dafür erforderlichen Würfe. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Bonus 5 (3+1 Punkte)
Es werden $n+1$ Urnen betrachtet. In der k-ten Urne befinden sich genau $k-1$ weiße und $n-k+1$) schwarze Kugeln. Auf gut Glück wird eine Urne ausgewählt und dann aus dieser zufällig eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel weiß ist?
Ist das Ergebnis plausibel?

Bonus 6 (4 Punkte)
Es sei X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p. Zeigen Sie, dass

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$

gilt.
Bemerkung: Aus dieser Aufgabe lernen wir, dass im Allgemeinen $E\left(\frac{1}{X+1}\right) \neq \frac{1}{EX+1}$ ist.

Bonus 7 (5 Punkte)
Es sei N eine Zufallsgröße, die nur Werte aus der Menge $\{1, 2, 3, ...\}$ der natürlichen Zahlen annehmen kann. Der Erwartungswert von N möge existieren. Beweisen Sie, dass dann folgende Formel für den Erwartungswert gilt:

$$EN = \sum_{k=0}^{\infty} P(N > k).$$

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass man die Reihe umordnen kann.

Bonus 8 (4 Punkte)
Wir betrachten folgendes Spiel:
Für einen Einsatz von e darf man solange würfeln, bis die erste 6 erzielt wird. Tritt dies im k-ten Wurf ein, so darf man einen Würfel $(k-1)$mal werfen. Erzielt man dabei mindestens eine 6, so erhält man den Betrag g ausgezahlt.

a) Geben Sie die Verteilung des Nettogewinns bei diesem Spiel an.
b) In welchem Verhältnis müssen g und e stehen, damit diese Spiel als fair bzeichnet werden kann.

Bonus 9 (5 Punkte)
Zwei Würfel werden geworfen. Es bezeichen Z das Produkt und S die Summe der beiden Augenzahlen.

a) Untersuchen sie, ob die beiden Zufallsgrößen unabhängig sind.
b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\varrho(S, Z)$.

Bonus 10 (5 Punkte)
Es seien X und y unabhängige Zufallsgrößen. X sei poissonverteilt mit dem Parameter λ, Y sei poissonverteilt mit dem Parameter μ. Beweisen Sie, dass $X + Y$ poissonverteilt ist mit dem Parameter $\lambda + \mu$.