Institut für Mathematik
Dr. Elke Warmuth
Dr. Evelyn Buckwar; Dipl.-Math. Jan Johannes Wintersemester 2001/2002

Übungen zur Vorlesung Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

2.1. In einem Wahrscheinlichkeitsraum gelte $P(A) = 0.4, P(B) = 0.3$ und $P(A \bigcap B) = 0.2$.
Berechnen Sie $P(A \bigcup B), P(\overline{A} \bigcap B), P(A \bigcap \overline{B})$ und $P(\overline{A} \bigcup \overline{B})$.

2.2. Ein Prüfer hat 18 Standardfragen, von denen er in jeder Prüfung 6 zufällig auswählt. Ein Kandidat kennt die Antwort von 10 Fragen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er die Prüfung besteht, wenn er dazu mindestens drei Fragen richtig beantworten muß?

2.3. Es seien A und B Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A) = \frac{3}{4}$ und $P(B) = \frac{1}{3}$.
Zeigen Sie, dass $\frac{1}{12} \leq P(A \bigcap B) \leq \frac{1}{3}$ gilt.

2.4. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eines der beiden Ereignisse A und B eintritt, $P(A) + P(B) - 2P(A \bigcap B)$ beträgt.

2.5. Ein Spieler verfolgt beim Roulette folgende Strategie: Er setzt stets auf ROT. (Rot hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{18}{37}$. Bei 0 erfolgt keine Auszahlung). Gewinnt er, so bricht er das Spiel ab. Verliert er, so verdoppelt er seinen Einsatz in der nächsten Runde. Das Kapital des Spielers beträgt 255 Punkte. Er setzt zuerst 1 Punkt auf ROT.

a) Geben Sie die Verteilung des Nettogewinns an.

b) Welchen Betrag erzielt der Spieler im Mittel, wenn er sehr häufig nach dieser Strategie verfährt?

2.6. Eine Urne enthält 100 Kugeln mit Nummern 00, 01, 02, ..., 99. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Es sei X die erste und Y die zweite Ziffer ihrer Nummer. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
a) $\{X = 3\}$ b)$\{Y = 4\}$ c)$\{X = Y\}$ d)$\{X < 4$ und $Y < 3\}$ e)$\{X \cdot Y > 49\}$.

2.7. Die Qualität eines Postens von 400 Teilen soll beurteilt werden. Hersteller und Abnehmer haben sich darauf geeinigt, dass Posten mit maximal 4% defekten Teilen als qualitativ gut eingestuft werden. Eine zufällige Stichprobe vom Umfang 20 wird entnommen. Der Posten soll angenommen werden, wenn sich nicht mehr als ein defektes Teil in der Stichprobe befindet.
Berechnen Sie die Annahmewahrscheinlichkeiten für folgende Fälle:
$D = 0, 1, 2, 10, 16, 20, 30, 40, 50, 100$.
Skizzieren Sie die Annahmekennlinie für die betrachtete Entscheidungsregel.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art höchstens? Welche Aussagen können Sie über die Wahrscheinlichkeit der Annahme schlechter Posten machen?
Beurteilen Sie das untersuchte Stichprobenverfahren einmal aus der Sicht des Herstellers und einmal aus der Sicht des Abnehmers.

2.8. a) Frau X tippt im Lotto 6 aus 49 die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Es sei X die zufällige Anzahl ihrer Richtigen. Die Zusatzzahl bleibt unberücksichtigt. Geben Sie die Verteilung von X an.

b) Herr Y tippt immer die Zahlen 6, 15, 23, 32, 38, 44. Es sei Y die zufällige Anzahl seiner Richtigen. Welche Verteilung besitzt Y?

c) Wer von beiden wird vermutlich im Durchschnitt auf lange Sicht mehr gewinnen?

2.9. Ein 30-jähriger Mann schließt eine Risikolebensversicherung über 100.000 DM mit einem Jahr Laufzeit ab. Er zahlt dafür einmalig 148,50 DM. Die Wahrscheinlichkeit, dass er im Laufe des nächsten Jahres stirbt, beträgt 0,001476. Im Todesfall zahlt die Vesicherung nach einem Jahr an den Begünstigten 100.000 DM, im Erlebensfall zahlt sie nichts. Zinsen sollen nicht berücksichtigt werden. Es sei X der Nettogewinn der Versicherung. Bestimmen Sie die Verteilung von X. Beurteilen Sie den durchschnittlichen Gewinn der Versicherung aus vielen Verträgen dieser Art.

2.10. In einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ seien $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Die Zufallsgröße X sei definiert durch

$$X(\omega) = \alpha \mathbb{I}_A(\omega) + \beta \mathbb{I}_B(\omega), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie die Verteilung von X an.