Institut für Mathematik
Dr. Elke Warmuth
Dr. Evelyn Buckwar; Dipl.-Math. Jan Johannes

Wintersemester 2001/2002

Übungen zur Vorlesung Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

6.1. Ein System heißt "k aus n-System", wenn es aus n Bauelementen besteht und genau dann arbeitet, wenn mindestens k Bauelemente arbeiten. Bestimmen Sie die Zuverlässigkeit des "k aus n-Systems", wenn alle n Bauelemente unabhängig voneinander arbeiten und die Zuverlässigkeit p besitzen.

6.2. Es seien X und Y unabhängige Zufallsgrößen, die jeweils die Werte -1 oder $+1$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ annehmen. Weiter sei $Z = X \cdot Y$. Zeigen Sie, dass X, Y und Z paarweise unabhängig sind. Sind sie auch unabhängig?

6.3. Es seien X und Y unabhängige Zufallsgrößen mit $X \sim B(n,p)$ und $Y \sim B(m,p)$. Finden Sie die Verteilung von $X+Y$.

6.4. Es seien X, Y und Z geometrisch verteilte Zufallsgrößen mit den Parametern p, q und r, wobei $0 < p, q, r < 1$ gelten soll. Berechnen Sie $P(X < Y < Z)$.

6.5. Es gibt Leitungen zwischen den Orten 2 und 3 und von jedem dieser Orte zu den Orten 1 und 4. Jede dieser Leitungen wird unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit p gestört. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man noch eine Nachricht von 1 nach 4 übermitteln? *Hinweis:* Benutzen Sie Indikatorfunktionen und $P(A) = EI_A$.

6.6. In einer Urne sind je 3 Kugeln mit dem Wert +1 und -1. Man darf nacheinander ziehen ohne zurückzulegen und darf stoppen, wann man will. Ziel ist, den Erwartungswert der Summe X der gezogenen Werte möglichst groß zu machen. Beschreiben Sie die Strategie. Berechnen Sie $E(X)$.

6.7. Beweisen Sie:
Ist X eine Zufallsgröße mit Werten in $\{0, 1, 2, ...\}$, deren Erwartungswert existiert, so gilt $EX = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$.

6.8. Es seien $X_1, X_2, ..., X_n$ unabhängige Zufallsgrößen mit positiven Werten und identischen Verteilungen. Zeigen Sie, dass $E(\frac{X_1}{X_1+...+X_n}) = \frac{1}{n}$ gilt.

6.9. Roulette. Setzt ein Spieler einen Chip auf ein Ereignis, das die Wahrscheinlichkeit $\frac{x}{37}$ besitzt, $x \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, so erhält er seinen Einsatz zurück und dazu $(\frac{36}{x} - 1)$ Chips. Wie viel gewinnt die Bank im Durchschnitt pro eingesetztem Chip auf lange Sicht.

6.10. Ein Spielautomat ordnet die Zahlen 1,2,3 und 4 auf gut Glück an. Für jede Zahl an der richtigen Stelle (verglichen mit der natürlichen Reihenfolge) bekommt man 1 DM.

a) Wie hoch muß der Einsatz sein, damit das Spiel fair ist?

b) Der Einsatz für ein Spiel betrage 1,20 DM. Jemand spielt 10 mal nacheinander an diesem Automaten. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz seines Reingewinns nach 10 Spielen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in diesen 10 Spielen mindestens einmal 4 DM gewinnt?