Institut für Mathematik
Dr. Elke Warmuth
Dr. Evelyn Buckwar; Dipl.-Math. Jan Johannes

Wintersemester 2001/2002

Übungen zur Vorlesung
Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

7.1. Beweisen Sie, dass die Indikatorfunktionen $\mathbb{I}_A$ und $\mathbb{I}_B$ genau dann unabhängig sind, wenn die Ereignisse A und B unabhängig sind.

7.2. Beweisen Sie

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY,$$

vorausgesetzt, alle auftretenden Erwartungswerte existieren.

7.3. Vereinfachen Sie

$$Cov(aX + b, cY + d)$$

soweit wie möglich.

7.4. Es wird n mal gewürfelt. Sei X die Anzahl der Einsen und Y die Anzahl der Sechsen, die dabei fallen.
Berechnen Sie $\rho_{X,Y}$.

7.5. Die Zufallsgrößen X und Y nehmen die Werte 1, 2 und 3 an. Dabei seien folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt.
$P(X = 1) = 0,5; P(X = 2) = 0,3; P(Y = 1) = 0,7;$
$P(Y = 2) = 0,2; P(X = 1, Y = 1) = 0,35;$
$P(X = 2, Y = 2) = 0,06; P(X = 3, Y = 1) = 0,20.$

a) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y.
b) Sind X und Y unabhängig?
c) Sind X und Y unkorreliert?

7.6. Es seien X und Y zwei Zufallsgrößen mit demselben Erwartungswert und derselben Varianz. Zeigen Sie, dass $U = X + Y$ und $V = X - Y$ unkorreliert sind.

7.7. Beweisen Sie: Wenn X und Y zwei Zufallsgrößen sind, die jeweils nur zwei Werte annehmen, und es gilt $Cov(X,Y) = 0$, dann sind X und Y unabhängig.
Hinweis: Klammern Sie in $Cov(X,Y)$ die Terme $(a - b)$ und $(d - c)$ aus, wobei a und b die Werte von X und c und d die Werte von Y sind.

7.8. Die Zufallsgröße X besitze eine gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den möglichen Werten -2, -1, 0, 1 und 2. Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten der Zufallsgrößen X und $Y = X^2$.

7.9. Die Zufallsgrößen X und Y seien unabhängig, identisch verteilt mit dem Erwartungswert a und der Streuung σ^2. Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten ϱ der Zufallsgrößen $U = \alpha X + \beta Y$ und $V = \alpha X - \beta Y$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Wann ist $|\rho| = 1$?

7.10. Es seien X, Y und Z unabhängige Zufallsgrößen mit $0 < VarX, VarY < \infty, VarZ < \infty$. Können die Zufallsgrößen $X_1 = X + Z$ und $Y_1 = Y + Z$ unabhängig sein? Wenn ja, geben Sie eine Bedingung dafür an.