Institut für Mathematik Wintersemester 2001/2002
Dr. Elke Warmuth
Dr. Evelyn Buckwar; Dipl.-Math. Jan Johannes

Übungen zur Vorlesung Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

9.1. Es sei R_n die relative Häufigkeit der Erfolge in einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ folgende Abschätzung:
$P(|R_n - p| \geq \varepsilon) \leq 2\exp(-2n\varepsilon^2)$.
Berechnen Sie auf der Grundlage dieser Abschätzung denjenigen Stichprobenumfang n, der eine Genauigkeit von ε und eine Sicherheit von $1-\alpha$ garantiert, wenn die unbekannte Wahrscheinlichkeit p durch die relative Häufigkeit R_n geschätzt wird.
Stellen Sie in einer Tabelle die Stichprobenumfänge für folgende Werte übersichtlich dar:
$\varepsilon : 0,05; 0,03; 0,01, \qquad 1-\alpha : 0,90; 0,95; 0,99$

9.2. a) Bei einer Ziehung im Spiel "6 aus 49" kommt die 13 mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{49}$ unter den Glückszahlen vor. Begründen Sie diese Aussage.

b) In 2796 Ziehungen kam die 13 genau 293-mal vor. Geben Sie ein Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens der 13 in einer Ziehung auf der Grundlage dieser Stichprobe an. Benutzen Sie die Tabelle aus Aufgabe 9.1.

9.3. Eine diskrete Zufallsgröße X heißt Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$, wenn sie die Werte $0, 1, 2, ...$ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, ...$ annimmt.

a) Berechnen Sie $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

b) $(X_1, X_2, ...X_n)$ sei eine mathematische Stichprobe, in der X_k Poisson-verteilt mit dem Parameter λ ist. Eine Realisierung der Stichprobe für $n = 10$ ergab die Werte 12, 8, 15, 17, 12, 11, 13, 15, 9, 12. Geben Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für λ an.

9.4. Ein Teilchen startet im Nullpunkt und bewegt sich auf der Achse bei einem Schritt um eine Einheit nach links bzw. rechts mit Wahrscheinlichkeit 1-p bzw. p. Die aufeinanderfolgenden Bewegungen seien unabhängig. Man sagt: Es vollführt eine zufällige Irrfahrt.

a) Bestimmen Sie die Verteilung der Position X nach 2 Schritten, EX und $\mathrm{Var}X$.

b) Bei 100 Durchführungen des Vorgangs ergaben sich folgende Realisierungen von $X : \begin{array}{ccc} -2 & 0 & 2 \\ \hline 11 & 40 & 49 \end{array}$. Schätzen Sie p mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode.

9.5. In einer Spielshow mit Ehepaaren zählen übereinstimmende Antworten der beiden Ehepartner als Erfolg. Einem Paar werden 5 Fragen gestellt, die jeweils nur mit "ja" oder "nein" zu beantworten sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt das Paar mindestens 4 Übereinstimmungen, wenn beide auf jede Frage die Antwort lediglich raten?
Halten Sie mindestens vier Übereinstimmungen für etwas Ungewöhnliches?

9.6. Meist nimmt man an, dass alle Wochentage als Tage der Geburt die gleiche Chance haben. Es gibt aber auch Argumente, dem Montag eine größere Wahrscheinlichkeit p zuzuschreiben. Gegeben seien deshalb die Hypothesen

$$H : p = \frac{1}{7} \text{ und } A : p > \frac{1}{7}.$$

Entwerfen Sie für dieses Problem einen Signifikanztest zum Signifikanzniveau 0,1 bei einem Stichprobenumfang von 20. Erheben Sie eine Stichprobe vom Umfang 20 in Ihrem Bekanntenkreis und entscheiden Sie aufgrund dieser Stichprobe über die Hypothesen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art bei $p = 0,3$?