Institut für Mathematik Wintersemester 2001/2002
Dr. Elke Warmuth
Dr. Evelyn Buckwar; Dipl.-Math. Jan Johannes

Übungen zur Vorlesung
Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

12.1. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X \sim Exp(\lambda)$. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabe 11.4..

12.2. Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine streng monoton wachsende Verteilungsfunktion und X eine auf dem Intervall [0,1] gleichverteilte Zufallsgröße. Die Zufallsgröße Y sei definiert durch $Y(w) = F^{-1}(X(w))$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y.

12.3. Die Zufallsgröße X sei normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2. Berechnen Sie die Dichte der Zufallsgröße $Y = e^x$.

12.4. Die Zufallsgröße X sei gleichverteilt auf dem Intervall [-1,1]. Bestimmen Sie die Dichte und den Erwartungswert von $Y = X^2$.

12.5. Eine Zufallsgröße X habe die Dichte $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
Berechnen Sie $E(\frac{1}{X}), E(1-X)$ und $E(X(1-X))$.

12.6. Die Lebensdauer X einer Leuchtstoffröhre sei exponentialverteilt mit dem Parameter λ. Es ist bekannt, dass ungefähr die Hälfte vieler Leuchtstoffröhren dieses Typs innerhalb von 1500 Stunden ausfällt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Leuchtstoffröhre mindestens 2500 Stunden "lebt".

12.7. a) Ein "zufälliges Quadrat" wird festgelegt, indem die Seitenlänge auf gut Glück aus $(0, a)$ ausgewählt wird. Wie groß ist der mittlere Flächeninhalt?
b) Wie groß ist der mittlere Flächeninhalt eines "zufälligen Rechtecks", dessen Seitenlängen X und Y unabhängig sind und gleichverteilt auf $(0, a)$?

12.8. Eine physikalische Größe soll ermittelt werden. Der wahre (unbekannte) Wert sei w. Die einzelnen Meßergebnisse seien unabhängige Zufallsgrößen X_i verteilt gemäß $N(w, \frac{w}{1000})^2)$. $\bar{X}$ sei das arithmetische Mittel der $X_i, i = 1, ..., n$.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\bar{X}$ von w um höchstens $\frac{w}{4000}$ abweicht, wenn 25 Messungen durchgeführt werden?
b) Nach wie vielen Messungen beträgt die Wahrscheinichkeit, dass $\bar{X}$ von w um höchstens $\frac{w}{4000}$ abweicht, mindestens 0,9.
c) Sei $n = 25$. In welchen Grenzen bewegt sich die Abweichung vom wahren Wert mit 99%iger Sicherheit?

12.9. Die Zufallsgröße X sei gleichverteilt im Intervall $[0, 2\pi]$. Die Zufallsgrößen Y_1 und Y_2 seien definiert als $Y_1 = \cos X$ und $Y_2 = \sin X$.
a) Berechnen Sie $E(Y_1), E(Y_2), D^2Y_1, D^2Y_2$ und $Cov(Y_1, Y_2)$.
b) Sind Y_1 und Y_2 unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

12.10. Die Lebensdauer eines radioaktiven Atoms, d.h. die Zeit bis zum Zerfall, sei exponentialverteilt mit dem Parameter $\frac{1}{a}, a > 0$. Die Halbwertzeit $t_{\frac{1}{2}}$ ist jener Zeitabschnitt, in dem das Atom mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zerfällt. Die Atome einer radioaktiven Substanz zerfallen unabhängig voneinander.
a) Interpretieren Sie den Parameter a.
b) Leiten Sie einen formelmäßigen Zusammenhang zwischen a und $t_{\frac{1}{2}}$ her.
c) Begründen Sie, dass die Halbwertzeit auch als jener Zeitabschnitt erklärt werden kann, in dem etwa die Hälfe der radioaktiven Substanz zerfällt.