

Goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen

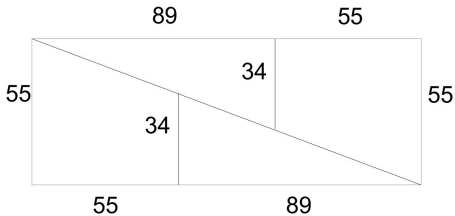
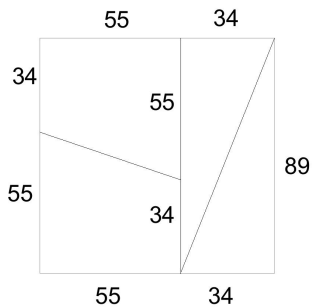
Thorsten Rohwedder und Thomas Uhlemann
HU Berlin

Tag der Mathematik 2013

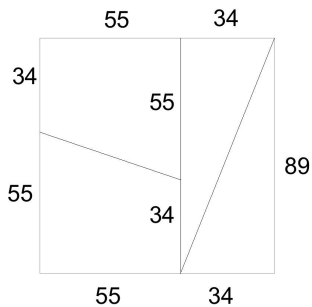


HUMBOLDT-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

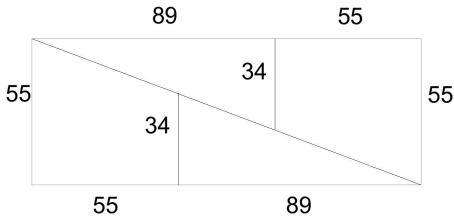




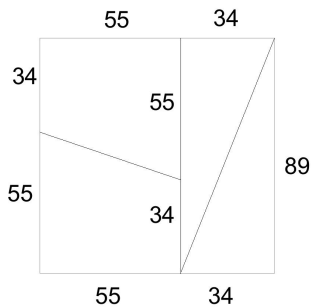
Quadrat mit Seitenlänge
89 cm,
also Flächeninhalt 7921 cm²



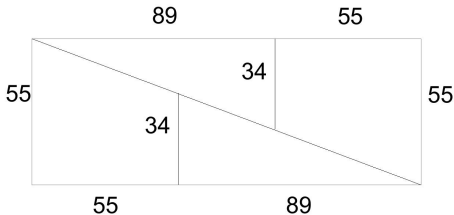
Quadrat mit Seitenlänge
89 cm,
also Flächeninhalt 7921 cm^2



Rechteck mit Seitenlängen
144 cm und 55 cm,
also Flächeninhalt 7920 cm^2



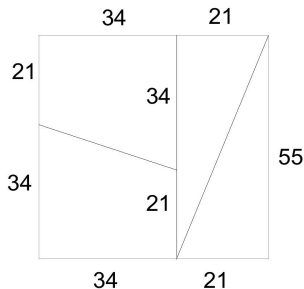
Quadrat mit Seitenlänge
89 cm,
also Flächeninhalt 7921 cm²



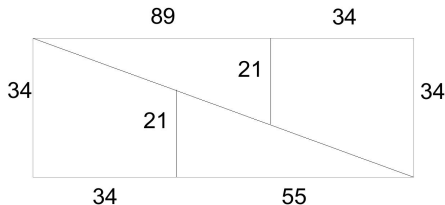
Rechteck mit Seitenlängen
144 cm und 55 cm,
also Flächeninhalt 7920 cm²

Wo ist der eine Quadratzentimeter hin?

Hier ist er!

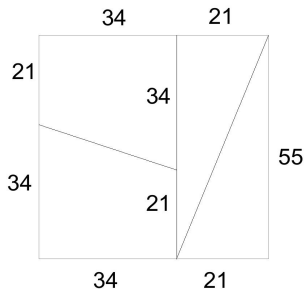


Quadrat mit Seitenlänge
55 cm,
also Flächeninhalt 3025 cm^2

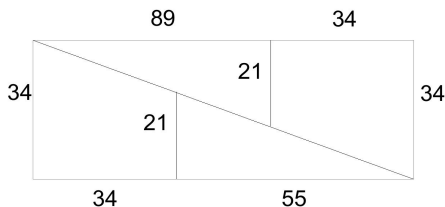


Rechteck mit Seitenlängen
89 cm und 34 cm,
also Flächeninhalt 3026 cm^2

Hier ist er!



Quadrat mit Seitenlänge
55 cm,
also Flächeninhalt 3025 cm²



Rechteck mit Seitenlängen
89 cm und 34 cm,
also Flächeninhalt 3026 cm²

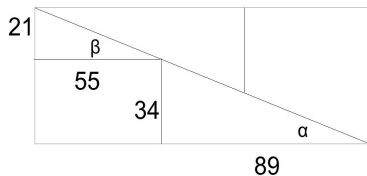
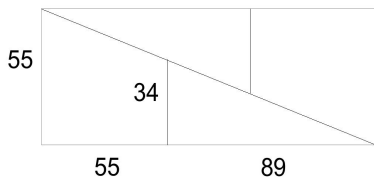
Danke für den einen Quadratzentimeter!

Bei dieser Art von Flächenumwandlung
scheint irgend etwas nicht zu stimmen,
aber was??

Bei dieser Art von Flächenumwandlung
scheint irgend etwas nicht zu stimmen,
aber was??

Und vor allem:
Was ist zu tun, um den Fehler zu finden?

Erste Idee: Nachrechnen



Strahlensatzfigur:

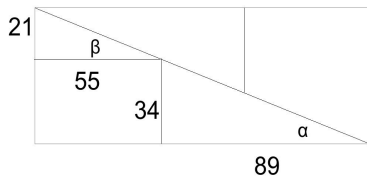
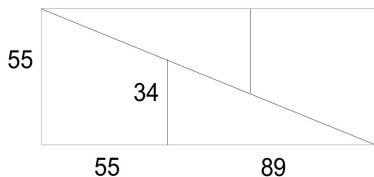
Es müsste eigentlich

$$\frac{89}{34} = \frac{144}{55}$$

gelten, es ist aber

$$\frac{89}{34} \approx 2.6176, \quad \frac{144}{55} = 2,6\overline{18}.$$

Erste Idee: Nachrechnen



Strahlensatzfigur:

Es müsste eigentlich

$$\frac{89}{34} = \frac{144}{55}$$

gelten, es ist aber

$$\frac{89}{34} \approx 2.6176, \quad \frac{144}{55} = 2,6\overline{18}.$$

Winkel an geschn. Parallelen:

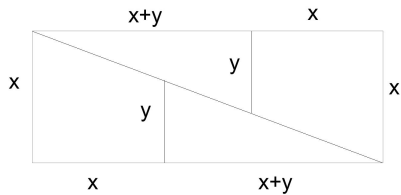
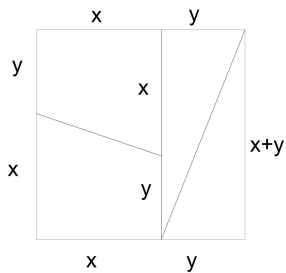
Es müsste eigentlich $\alpha = \beta$
gelten, es ist aber

$$\tan \alpha = \frac{34}{89} \leadsto \alpha \approx 20,908^\circ$$

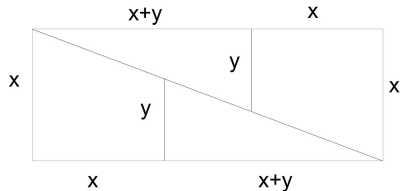
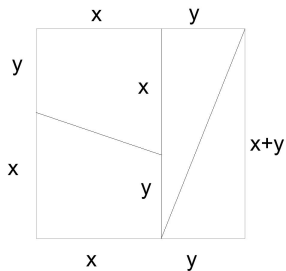
und

$$\tan \beta = \frac{21}{55} \leadsto \beta \approx 20,898^\circ.$$

Zweite Idee: Allgemeine Lösung des Problems?



Zweite Idee: Allgemeine Lösung des Problems?



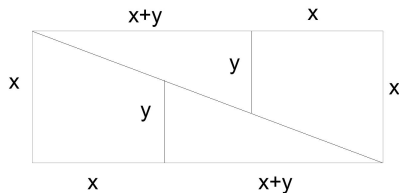
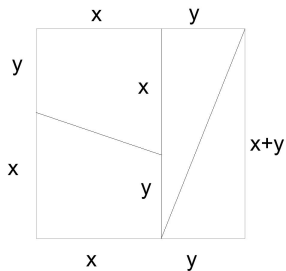
Quadrat mit Seitenlänge

$x+y$,

also Flächeninhalt

$$(x+y)^2$$

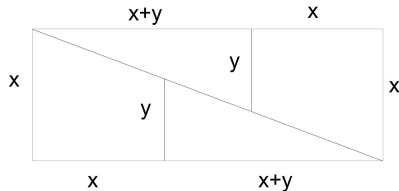
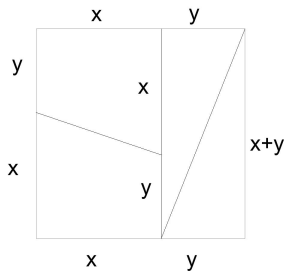
Zweite Idee: Allgemeine Lösung des Problems?



Quadrat mit Seitenlänge
 $x+y$,
also Flächeninhalt
 $(x+y)^2$

Rechteck mit Seitenlängen
 x und $2x+y$,
also Flächeninhalt
 $(2x+y) \cdot x$

Zweite Idee: Allgemeine Lösung des Problems?



Quadrat mit Seitenlänge
 $x+y$,
also Flächeninhalt
 $(x+y)^2$

Rechteck mit Seitenlängen
 x und $2x+y$,
also Flächeninhalt
 $(2x+y) \cdot x$

Es muss also $(x+y)^2 = (2x+y) \cdot x$ gelten.

$$(x + y)^2 = (2x + y) \cdot x$$

$$(x + y)^2 = (2x + y) \cdot x$$

$$\iff x^2 - xy - y^2 = 0$$

$$(x + y)^2 = (2x + y) \cdot x$$

$$\iff x^2 - xy - y^2 = 0$$

$$\iff x_{1,2} = \frac{1}{2}y \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + y^2}$$

$$(x + y)^2 = (2x + y) \cdot x$$

$$\iff x^2 - xy - y^2 = 0$$

$$\iff x_{1,2} = \frac{1}{2}y \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + y^2}$$

$$x_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot y, \quad \text{also}$$

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} =: \phi}$$

$$(x + y)^2 = (2x + y) \cdot x$$

$$\iff x^2 - xy - y^2 = 0$$

$$\iff x_{1,2} = \frac{1}{2}y \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + y^2}$$

$$x_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot y, \quad \text{also}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} =: \Phi$$

Dies ist der goldene Schnitt $\Phi \approx 1,618034!$

$$(x + y)^2 = (2x + y) \cdot x$$

$$\iff x^2 - xy - y^2 = 0$$

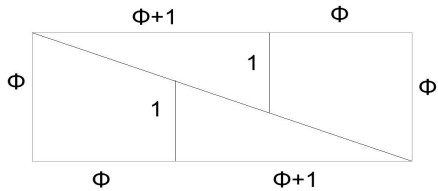
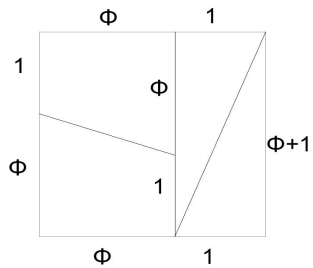
$$\iff x_{1,2} = \frac{1}{2}y \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + y^2}$$

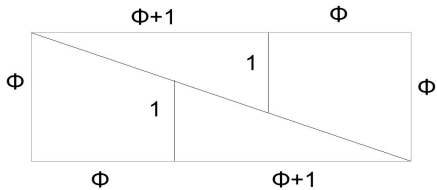
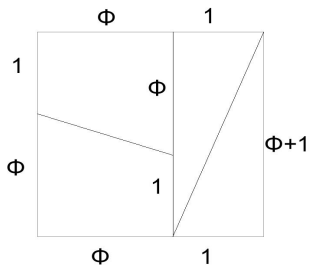
$$x_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot y, \quad \text{also}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} =: \Phi$$

Dies ist der goldene Schnitt $\Phi \approx 1,618034!$

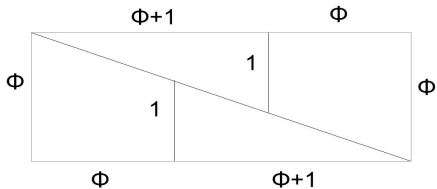
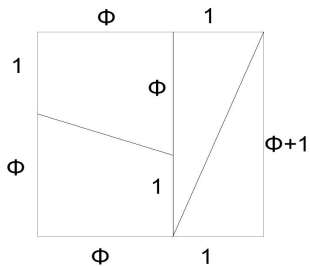
$$\left(x_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot y = (1 - \Phi) \cdot y, \quad x_2 < 0\right)$$





Strahlensatz:

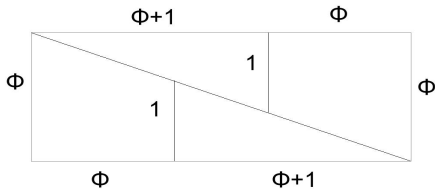
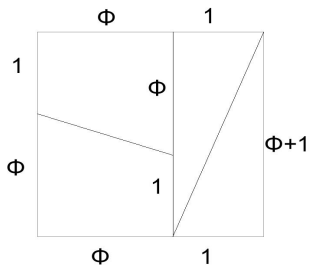
$$\frac{\phi + 1}{1} \stackrel{!}{=} \frac{2\phi + 1}{\phi}$$



Strahlensatz:

$$\frac{\phi + 1}{1} \stackrel{!}{=} \frac{2\phi + 1}{\phi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi + 1 = 2 + \frac{1}{\phi}$$



Strahlensatz:

$$\frac{\Phi + 1}{1} \stackrel{!}{=} \frac{2\Phi + 1}{\Phi}$$

$$\Leftrightarrow \Phi + 1 = 2 + \frac{1}{\Phi}$$

$$\Leftrightarrow \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$$

$$\phi - 1 = \frac{1}{\phi}?$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \phi - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,62$$

also

$$(\phi - 1) \cdot \phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{5 - 1}{4} = 1.$$

$$\phi - 1 = \frac{1}{\phi}?$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \phi - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,62$$

also

$$(\phi - 1) \cdot \phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{5 - 1}{4} = 1.$$

Daher:

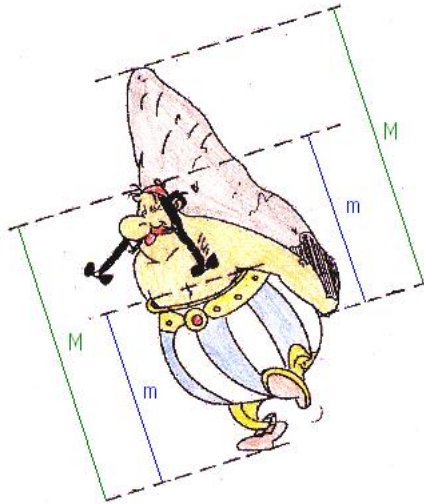
$$\boxed{\phi - 1 = \frac{1}{\phi}, \quad \phi \cdot \frac{1}{\phi} = 1 \quad \text{und} \quad \phi - \frac{1}{\phi} = 1}$$

ϕ und $\frac{1}{\phi}$ sind die einzigen positiven Zahlen, deren Produkt und Differenz gleichzeitig 1 ergibt.

Goldener Schnitt in Kunst und Architektur



...und Popkultur



Approximation von Φ durch Kettenbrüche

Wegen $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$:

$$\begin{aligned}\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \dots\end{aligned}$$

Approximation von Φ durch Kettenbrüche

Wegen $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$:

$$\begin{aligned}\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \dots\end{aligned}$$

Φ ist Fixpunkt der Funktion $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ (der einzige mit $x > 0$).

Approximation von Φ durch Kettenbrüche

Wegen $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$:

$$\begin{aligned}\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \dots\end{aligned}$$

Φ ist Fixpunkt der Funktion $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ (der einzige mit $x > 0$).

Fixpunktiteration: $\phi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\phi_n} \rightarrow \Phi$ für beliebiges $\phi_1 > 0$.

Approximation von Φ durch Kettenbrüche

Wegen $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$:

$$\begin{aligned}\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \dots\end{aligned}$$

Φ ist Fixpunkt der Funktion $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ (der einzige mit $x > 0$).

Fixpunktiteration: $\phi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\phi_n} \rightarrow \Phi$ für beliebiges $\phi_1 > 0$.

Startwert $\phi_1 = 1$:

ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	$\dots$
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\dots$

Approximation von Φ durch Kettenbrüche

Wegen $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$:

$$\begin{aligned}\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \dots\end{aligned}$$

Φ ist Fixpunkt der Funktion $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ (der einzige mit $x > 0$).

Fixpunktiteration: $\phi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\phi_n} \rightarrow \Phi$ für beliebiges $\phi_1 > 0$.

Startwert $\phi_1 = 1$:

ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	$\dots$
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\dots$

Approximation von Φ durch Kettenbrüche

Wegen $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$:

$$\begin{aligned}\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \dots\end{aligned}$$

Φ ist Fixpunkt der Funktion $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ (der einzige mit $x > 0$).

Fixpunktiteration: $\phi_{n+1} = 1 + \frac{1}{\phi_n} \rightarrow \Phi$ für beliebiges $\phi_1 > 0$.

Startwert $\phi_1 = 1$:

ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	$\dots$
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\dots$

Goldener Schnitt und Fibonacci-Folge

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

$\leadsto$ Fibonacci-Folge $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$

Goldener Schnitt und Fibonacci-Folge

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

$\leadsto$ Fibonacci-Folge $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$

mit

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n},$$

Goldener Schnitt und Fibonacci-Folge

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

$\leadsto$ Fibonacci-Folge $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$

mit

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n},$$

umgekehrt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^n - (1 - \Phi)^n)$$

(Formel von Binet)

Wo war jetzt der eine Quadratzentimeter?

Quotienten von aufeinanderfolgenden Fibonacci-Gliedern approximieren Φ :

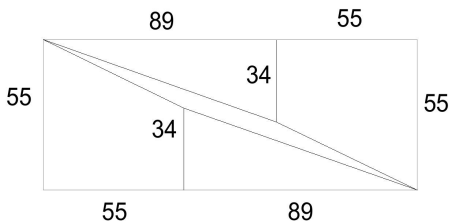
$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \approx \frac{F_{n+1}}{F_n} \text{ für große } n \in \mathbb{N}.$$

Wo war jetzt der eine Quadratzentimeter?

Quotienten von aufeinanderfolgenden Fibonacci-Gliedern approximieren Φ :

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \approx \frac{F_{n+1}}{F_n} \text{ für große } n \in \mathbb{N}.$$

...deshalb klappt die Quadrat-Rechteck-Umwandlung „fast“ für Teilungsverhältnis $55 : 34 = 1,618 \approx \Phi$.

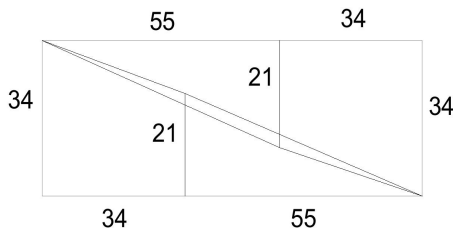


Wo war jetzt der eine Quadratzentimeter?

Quotienten von aufeinanderfolgenden Fibonacci-Gliedern approximieren Φ :

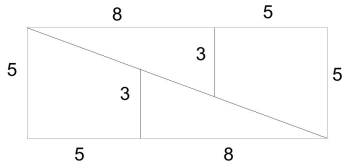
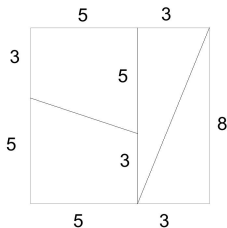
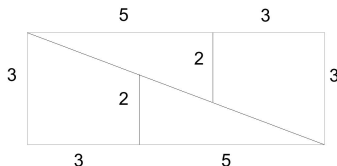
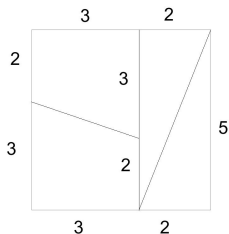
$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \approx \frac{F_{n+1}}{F_n} \text{ für große } n \in \mathbb{N}.$$

...deshalb klappt die Quadrat-Rechteck-Umwandlung „fast“ für Teilungsverhältnis $34 : 21 = 1,619 \approx \Phi$.



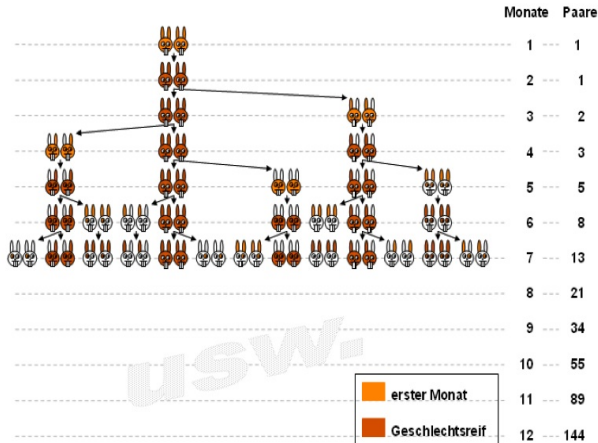
...für den Unterricht:

Als Arbeitsauftrag für Schüler klappt das Ganze auch prima mit kleineren Fibonaccizahlen:



Der Klassiker: Vermehrung von Kaninchen

(nach „Liber abbaci“, Ficonacci)



Quelle: fibonaccifolge.ch

Fibonacci in: Wie viele Ururur...ahnen hat eine Honigbiene?

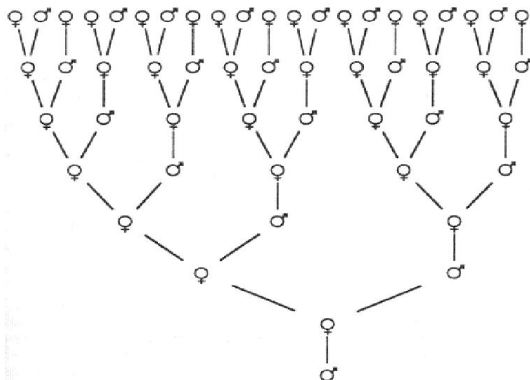
- ▶ Mensch: 2^k Vorfahren in k -ter Vorfahrgeneration

Fibonacci in: Wie viele Ururur...ahnen hat eine Honigbiene?

- ▶ Mensch: 2^k Vorfahren in k -ter Vorfahrgeneration
- ▶ Honigbiene: $\text{♀} \rightarrow \text{♂}$, $\text{♀} + \text{♂} \rightarrow \text{♀}$

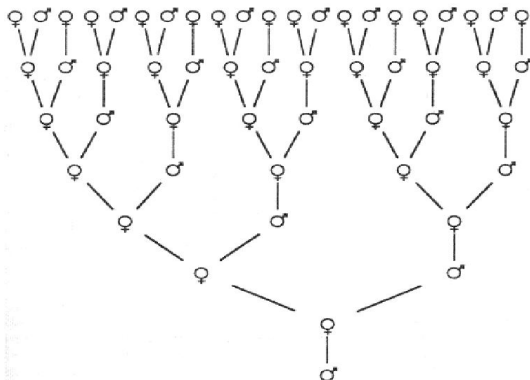
Fibonacci in: Wie viele Ururur...ahren hat eine Honigbiene?

- ▶ Mensch: 2^k Vorfahren in k -ter Vorfahrgeneration
- ▶ Honigbiene: $\text{♀} \rightarrow \text{♂}$, $\text{♀} + \text{♂} \rightarrow \text{♀}$



Fibonacci in: Wie viele Ururur...ahren hat eine Honigbiene?

- ▶ Mensch: 2^k Vorfahren in k -ter Vorfahrgeneration
- ▶ Honigbiene: $\text{♀} \rightarrow \text{♂}$, $\text{♀} + \text{♂} \rightarrow \text{♀}$



▷ Es ergeben sich 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Ahnen!

Fibonacci in: Potenzen des goldenen Schnitts

$$\Phi = 1\Phi$$

$$\Phi^2 = 1\Phi + 1$$

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\Phi^5 = 5\Phi + 3$$

$$\Phi^6 = 8\Phi + 5$$

$$\Phi^7 = 13\Phi + 8$$

$$\Phi^8 = 21\Phi + 13$$

$\vdots$

Fibonacci in: Potenzen des goldenen Schnitts

$$\phi = 1\phi$$

$$\phi^2 = 1\phi + 1$$

$$\phi^3 = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = 8\phi + 5$$

$$\phi^7 = 13\phi + 8$$

$$\phi^8 = 21\phi + 13$$

$\vdots$

Fibonacci in: Potenzen des goldenen Schnitts

$$\phi = 1\phi$$

$$\phi^2 = 1\phi + 1$$

$$\phi^3 = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = 5\phi + 3$$

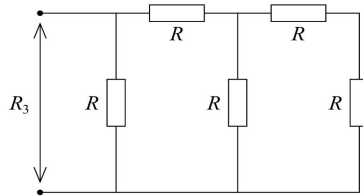
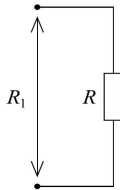
$$\phi^6 = 8\phi + 5$$

$$\phi^7 = 13\phi + 8$$

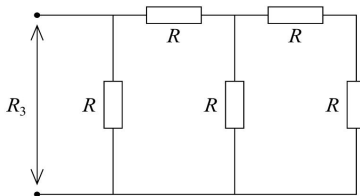
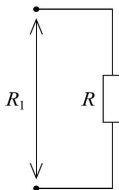
$$\phi^8 = 21\phi + 13$$

$\vdots$

Fibonacci in der Physik

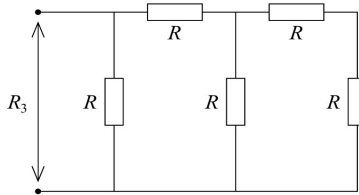
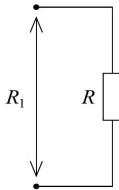


Fibonacci in der Physik

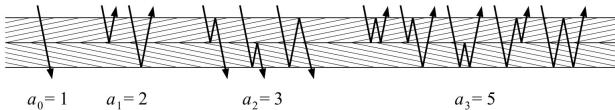


$$R_3 = R \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}}} = \frac{5}{8} \cdot R, \quad \text{allgemein: } R_n = \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} \cdot R$$

Fibonacci in der Physik



$$R_3 = R \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + 1}}}} = \frac{5}{8} \cdot R, \quad \text{allgemein: } R_n = \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} \cdot R$$



beide aus: Basin, S. L.: „The Fibonacci Sequence as it Appears in Nature“, 1963;
 zit. n. M. Kuhn: „Die Fibonacci-Zahlen“, Facharbeit am Emil v. Behring-Gymnasium Spardorf, 1990

Noch ein paar Merkwürdigkeiten

...eine merkwürdige Summe:

$$\begin{array}{r} 0,1 \\ + 0,01 \\ + 0,002 \\ + 0,0003 \\ + 0,00005 \\ + 0,000013 \\ + 0,0000021 \\ + 0,00000034 \\ + 0,000000055 \\ + 0,0000000089 \\ + \dots \\ \hline = ? \end{array}$$

Noch ein paar Merkwürdigkeiten

...eine merkwürdige Summe:

$$\begin{array}{r} 0,1 \\ + 0,01 \\ + 0,002 \\ + 0,0003 \\ + 0,00005 \\ + 0,000013 \\ + 0,0000021 \\ + 0,00000034 \\ + 0,000000055 \\ + 0,0000000089 \\ + \dots \\ \hline \end{array}$$

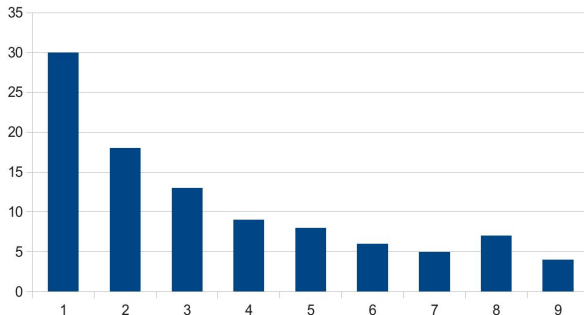
$$= \frac{10}{89} !$$

Noch ein paar Merkwürdigkeiten

Häufigkeit der ersten Ziffer der Fibonacci-Zahlen:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...)

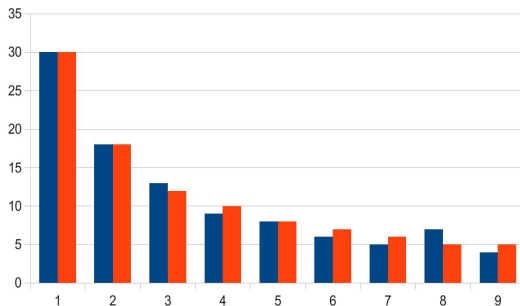
erste Ziffer	Häufigkeit
1	30
2	18
3	13
4	9
5	8
6	6
7	5
8	7
9	4



Noch ein paar Merkwürdigkeiten

...entspricht der Benford-Verteilung $p(z) = \lg\left(1 + \frac{1}{z}\right)$.

erste Ziffer	Häufigkeit	Benford
1	30	30
2	18	18
3	13	12
4	9	10
5	8	8
6	6	7
7	5	6
8	7	5
9	4	5



Jo Niemeyer: Land-Art mit dem Goldenen Schnitt



- insgesamt 20 jeweils 5.50 m hohe Edelstahl-Stelen

Jo Niemeyer: Land-Art mit dem Goldenen Schnitt



- ▶ insgesamt 20 jeweils 5.50 m hohe Edelstahl-Stelen
- ▶ Abstand der ersten beiden Stelen: 45,8 cm

Jo Niemeyer: Land-Art mit dem Goldenen Schnitt



- ▶ insgesamt 20 jeweils 5.50 m hohe Edelstahl-Stelen
- ▶ Abstand der ersten beiden Stelen: 45,8 cm
- ▶ Abstand $n + 1$ zu $n = \Phi \times$ Abstand n zu 1

Standorte der einzelnen Pfähle

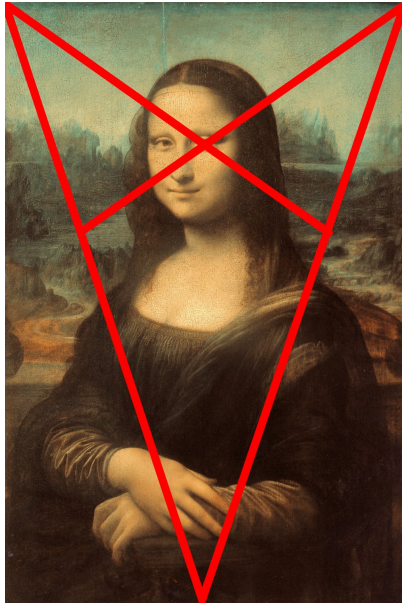
Stele Nr.	Position ab Stele Nr. 20 = 0	Abstand zur vorher- gehenden Stele	Ort der Aufstellung	exakte Koordinaten
1	45.8 cm	45.8 cm	Ropinsalmi, Finnland	68°40'0.00" N 21°36'0.04" E
2	1,198 m	74.0 cm	Lappland, Finnland	68°40'0.01" N 21°36'0.10" E
3	3.137 m	1.939 m	Lappland, Finnland	68°40'0.03" N 21°36'0.27" E
4	8.214 m	5.077 m	Lappland, Finnland	68°40'0.07" N 21°36'0.70" E
5	21.505 m	13.291 m	Lappland, Finnland	68°40'0.19" N 21°36'1.85" E
6	56.300 m	34.795 m	Lappland, Finnland	68°40'0.49" N 21°36'4.83" E
7	147.397 m	91.097 m	Lappland, Finnland	68°40'1.27" N 21°36'12.65" E
8	385.883 m	238.5 m	Lappland, Finnland	68°40'3.33" N 21°36'33.12" E
9	1.0103 km	624.4 m	Lappland, Finnland	68°40'8.71" N 21°37'26.71" E
10	2.6449 km	1.634 km	Lappland, Finnland	68°40'22.79" N 21°39'47.05" E
11	6.9244 km	4.279 km	Lappland, Finnland	68°40'59.49" N 21°45'54.70" E

Standorte der einzelnen Pfähle

10	2.6449 km	1.634 km	Lapland, Finnland	68°40'22.79" N 21°39'47.05" E
11	6.9244 km	4.279 km	Lapland, Finnland	68°40'59.49" N 21°45'54.70" E
12	18.128 km	11.203 km	Lapland, Finnland	68°42'34.50" N 22°1'58.79" E
13	47.460 km	29.332 km	Kautokeino, Norwegen	68°46'36.01" N 22°44'13.47" E
14	124.25 km	76.792 km	Anarjokka, Kautokeino, Norwegen	68°56'17.96" N 24°35'58.95" E
15	325.30 km	201.05 km	Pitkajarvi, Rußland	69°15'46.59" N 29°35'24.03" E
16	851.64 km	526.35 km	Barents-See	69°24'17.38" N 43°1'49.86" E
17	2229.6 km	1378.0 km	Noryi Urengoj, Rußland (Sibirien)	65°15'36.20" N 73°47'21.79" E
18	5837.3 km	3607.6 km	Baotou, China (Innere Mongolei)	40°4'2.76" N 109°46'37.80" E
19	15282 km	9444.9 km	Wilsons Promontory N.P., Australien	38°24'54.50" S 145°24'18.71" E
20	40009 km	24727 km	Ropinsalmi, Finnland	68°40'0.00" N 21°36'0.00" E

In 20 Stelen um die Welt!

...und zu all dem lächelt die Mona Lisa.



Quelle: de.academic.ru

Wort zum Samstag:

„Dass zwei Dinge sich auf eine schöne Art vereinigen ohne ein drittes, das ist unmöglich. Denn es muss ein Band zwischen ihnen entstehen, dass sie vereinigt.

Das kann die Proportion am besten vollbringen. Denn wenn von irgend drei Zahlen die mittlere sich zu der kleinsten verhält, wie die größte zu der mittleren selbst, [. . .] dann wird das Letzte und das Erste das Mittlere und das Mittlere Erstes und Letztes, alles wird also mit Notwendigkeit dasselbe, und da es dasselbe wird, bildet es ein einziges. “

Plato: Timaios, zit. nach Henning/Hartfeld:
Goldener Schnitt in der Mathematik

*Vielen Dank für
Ihre Aufmerksamkeit!*
