Einführung in die Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

Franz Friedrich (537837)

Erstellt am: 1. Juli 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Einführung der Trigonometrie ist im Berliner Rahmenlehrplan der Sekundarstufe 1 für das Fach Mathematik unter den Leitideen Messen, Funktionaler Zusammenhang und Raum und Form im Modul P5 - Mit Winkeln und Längen rechnen der Jahrgangsstufe 9/10 wiederzufinden. Die modernen Lehrbücher führen die Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck ein, analog zum Schwerpunkt der Leitidee Messen. [1] Die Trigonometrie lässt sich auch am Einheitskreis unter Betonung der Leitidee funktionaler Zusammenhang einführen. Die Einführung der Trigonometrie am Einheitskreis ist vorwiegend in älteren Schulbüchern anzutreffen. In dieser Ausarbeitung wird die Einführung der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck vorgestellt. Dazu wird zunächst die genetische Unterrichtsweise thematisiert, mit welcher G. Graumann (1987) seinen Vorschlag für eine Unterrichtssequenz zur Einführung der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck begründet. [2] Anhand dieses Vorschlags wird auf die einzelnen Schritte der Einführung der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck näher eingegangen und abschließend die Vor- und Nachteile der Einführung der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck gegenüber der Einführung am Einheitskreis diskutiert.

2 Genetische Einführung in die Trigonometrie

In der Behandlung der Trigonometrie bestehen viele Bezüge zu bereits behandelten Inhalten, insbesondere innerhalb der Leitidee Raum und Form. In der Grundschule beginnend werden im gesamten Verlauf der Sekundarstufe I geometrische Figuren untersucht und zunehmen Berechnungen an ihnen durch geführt, so dass man von einer zunehmenden Algebraisierung sprechen kann. E. C. Wittmann betonte diesen Algebraisierungsaspekt besonders und bezeichnete als Ziel der Geometrie Formeln zu entwickeln, die aus Seitenlängen und Winkelmaßen die ein Dreieck bis auf Kongruenz festgelegen die restlichen Stücke zu berechnen. [6]
E. C. Wittmann (1981) beschreibt weiter den Begriff genetisch bezüglich des Mathematikunterrichts, und zwar folgendermaßen: "Eine Darstellung einer mathematischen Theorie heißt genetisch, wenn sie an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist."[7]
G. Graumann (1987) nennt eine Unterrichtsweise genetisch, wenn sie sich an der historischen Begriffsgenese orientiert, die geistige Entwicklung des Lernenden berücksichtigt und die Absicht verfolgt, den Sinn der Behandlung des Themas zu verdeutlichen. [2]
Weiter unterscheidet O. Toeplitz (1927), einer der Mitbegründer der genetischen Unterrichtsmethode in die direkte und indirekte genetische Methode. Mit der direkten genetischen Methode kann man den Lernenden die Entdeckung in ihrer ganzen Dramatik vorführen und damit Fragestellungen und Begriffe vor ihnen entstehen lassen. Mit der indirekten genetischen Methode lernt man zunächst für sich selbst durch historische Analyse was der eigentliche Sinn jedes Begriffes ist und zieht daraus Folgerungen für das Lehren des Begriffes, die dann nichts mehr mit der Historie zu tun haben. [5]
G. Graumann schließt sich der indirekten genetischen Methode an, weist jedoch darauf hin dem Lernenden bei der Einführung der Trigonometrie die wesentlichen historischen Fakten nicht zu verschweigen und macht einen Vorschlag für eine Unterrichtssequenz (siehe Abschnitt 3.1). [2]

3 Einstieg in die Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

3.1 Vorschlag für eine Unterrichtssequenz nach G. Graumann (1987)

In der Schule ist eine Einführung der Trigonometrie analog zur Historie anhand der Astronomie nicht angebracht, stattdessen empfiehlt Graumann das dahinter liegende Kernproblem als Einstieg zu wählen. Mittels des Satzes des Pythagoras lassen sich an Körpern und Flächen viele genaue Berechnungen durchführen. Trotzdem sind eine Reihe einfacher Dreiecke nicht berechenbar, obwohl über die Kongruenzsätze die Konstruktion eindeutig ist. Hierbei wird deutlich, dass immer ein oder zwei Winkel bekannt sind und man lediglich einige Probleme über die Ähnlichkeit und die Bestimmungen von Streckenverhältnissen lösen kann. Durch Kombination dieser Aspekte wird man darauf geführt, dass bei ähnlichen Dreiecken die Winkel mit den Seitenverhältnissen in Zusammenhang stehen. Betrachtet werden nun gleichschenklige und/oder rechtwinklige Dreiecke, da beliebige Dreiecke ein zu große Variationsvielfalt liefern und bei gleichseitigen Dreiecken und Dreiecken aus dem halben Quadrat eine Variation des Winkels nicht möglich ist.
Pädagogisch von Vorteil wäre es zunächst das gleichschenklige Dreieck der Historie entsprechend in den Vordergrund zu stellen, da nur ein Seitenverhältnis auftritt und im wesentlichen nur ein Winkel hervorsticht. Aus Zeitgründen kann man jedoch auch das rechtwinklige Dreieck betrachten (siehe Abb.1). Unter Bezugnahme auf die Ähnlichkeit beziehungsweise die Strahlensätze ist herauszuheben, dass das entsprechende Seitenverhältnis allein von der Größe des betreffenden Winkels abhängt (siehe Abb. 2).
Aufgrund kombinatorischer Überlegung aller möglichen Seitenverhältnisse und des operativen Prinzips sollten gleich alle trigonometrischen Funktionen eingeführt werden (siehe Abb. 4). Dabei werden die ersten Zusammenhänge zwischen den Funktionen von selbst klar (siehe Abschnitt 3.4). G. Graumann empfiehlt weiter, die Entstehungsgeschichte der Bezeichnungen für die trigonometrischen Funktionen einzufügen. Anschließend stellt sich die Frage, wie man exakte Werte für die trigonometrischen Funktionen berechnen kann. Dabei stellt sich heraus, dass für bestimmte Winkel die trigonometrischen Werte bei bekannten Seitenverhältnissen des rechtwinkligen Dreiecks mit diesem Winkel ermittelt werden können (siehe Abschnitt 3.3). [2]

3.2 Einführung von Sinus, Kosinus und Tangens

Die Einführung der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck baut auf den Inhalten des Moduls P2 - Längen und Flächen berechnen der Jahrgangsstufe 9/10 auf. [1] Insbesondere der Satz des Pythagoras, die Grundlagen der Ähnlichkeit und die Strahlensätze sind für Schülerinnen und Schüler bei der Betrachtung der Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck notwendig. Zur Motivation der Einführung der Trigonometrie sollte zunächst ein Anwendungsoroblem besprochen werden, welches Schülerinnen und Schüler in voran gegangenen Schuljahren durch maßstäbliche Betrachtungen konstruktiv bearbeitet werden konnten. Bisher kennen die Schülerinnen und Schüler keinen Weg, aus gegebenen Winkeln und Seitenlängen fehlende Winkel und Seitenlängen zu berechnen. Zunächst sollten Schülerinnen und Schüler also zu der Erkenntnis gelangen, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis zweier Seitenlängen nur von der Größe eines Winkels abhängt. [6] Hierfür kommen verschiedene Anwendungsprobleme in Frage, zum Beispiel nachfolgendes Anwendungsproblem (siehe Abb. 1) an.

1

Der Winkel, den ein Sonnenstrahl gegen die horizontale Erdoberfläche bildet, wird Sonnenhöhe genannt. Um an einem bestimmten Ort auf der Erde die Sonnenhöhe zu bestimmen, hat man schon im Altertum einen Stab so weit von dem Ort senkrecht in die Erdoberfläche gesteckt, dass der Schatten des Stabes gerade an dem Ort endete.

a) Sprecht über die altertümliche Methode zur Bestimmung der Sonnenhöhe. Findet weitere Möglichkeiten, die Sonnenhöhe zu bestimmen.

b) Ermittelt zeichnerisch die Sonnenhöhe, wenn ein 2 m langer Stab eine Schattenlänge von 2,47 m hat. Welche Schattenlänge hätte zu gleicher Zeit am selben Ort ein 1 m langer Stab bzw. ein 10 m hoher Baum?

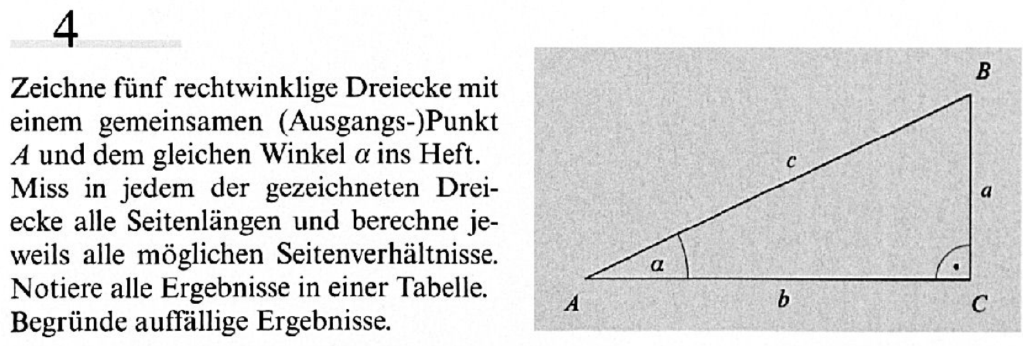
2

a) Ermittle zeichnerisch die Länge eines Stabes, dessen Schatten bei einer Sonnenhöhe von 42° gerade 2,0 m (2,4 m; 2,8 m) lang ist.

b) Wie lang ist der Schatten eines 1,0 m (1,5 m; 2,0 m) langen Stabes bei einer Sonnenhöhe von 45°?

Abbildung 1: aus Mathematik Plus Klasse 10 (2009), S. 110

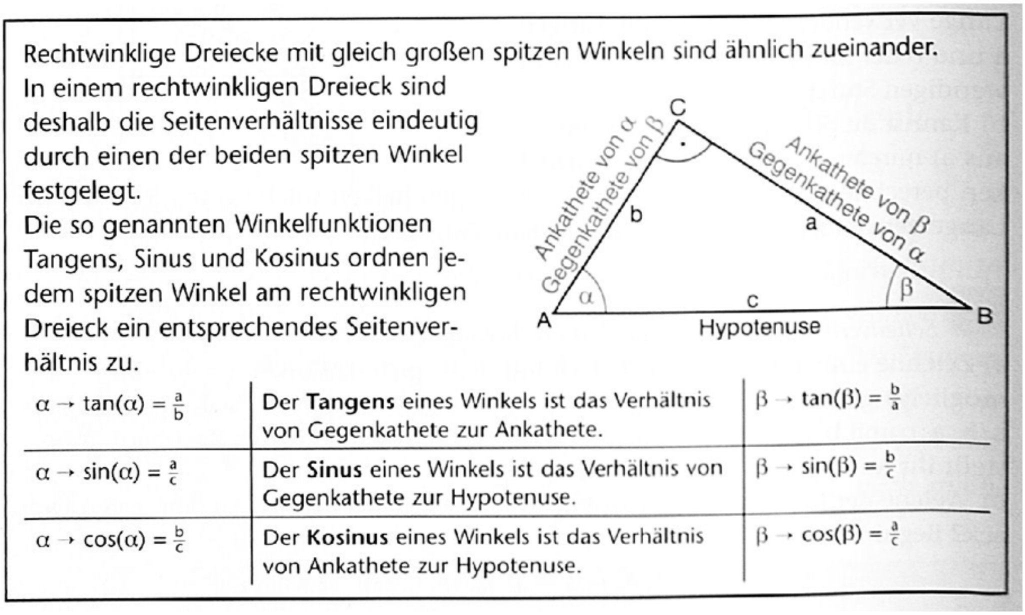
Mit dem Beispiel aus Abb. 1 kann die exakte rechnerische Bestimmung fehlender Größen im rechtwinkligen Dreieck motiviert werden. Gerade Aufgabe 2 aus Abb. 1 eignet sich mit Hilfe der daraus resultierenden Strahlensatzfigur Aussagen über das Verhältnis zweier Seitenlängen zu erarbeiten. Analog zur historischen Begriffsgenese bieten sich auch Vermessungsprobleme, wie von K. Maas (1998) vorgestellt, an. [3] Die Erkenntnis, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Verhältnis zweier Seitenlängen nur von der Größe eines Winkels abhängt sollte anschließend zum Beispiel mit nachfolgendem Arbeitsauftrag (siehe Abb. 2) gesichert werden. [6]


4

Zeichne fünf rechtwinklige Dreiecke mit einem gemeinsamen (Ausgangs-)Punkt A und dem gleichen Winkel α ins Heft. Miss in jedem der gezeichneten Dreiecke alle Seitenlängen und berechne jeweils alle möglichen Seitenverhältnisse. Notiere alle Ergebnisse in einer Tabelle. Begründe auffällige Ergebnisse.

Abbildung 2: aus Mathematik Plus Klasse 10 (2009), S. 110

Mit einem DGS lässt sich von Schülerinnen und Schülern diese Erkenntnis auch selbst erkunden. Aufgrund des gewählten Einstiegsproblems wird mit Hilfe der Strahlensätze begründet, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die Seitenverhältnisse nur von einem spitzen Winkel abhängen beziehungsweise sich Winkelgrößen eindeutig Seitenverhältnisse zuordnen lassen. Anschließend folgt die Definition von Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck. [6]


Rechtwinklige Dreiecke mit gleich großen spitzen Winkeln sind ähnlich zueinander.
In einem rechtwinkligen Dreieck sind deshalb die Seitenverhältnisse eindeutig durch einen der beiden spitzen Winkel festgelegt.
Die so genannten Winkelfunktionen Tangens, Sinus und Kosinus ordnen jedem spitzen Winkel am rechtwinkligen Dreieck ein entsprechendes Seitenverhältnis zu.

$\alpha \rightarrow \tan(\alpha) = \frac{a}{b}$	Der **Tangens** eines Winkels ist das Verhältnis von Gegenkathete zur Ankathete.	$\beta \rightarrow \tan(\beta) = \frac{b}{a}$
$\alpha \rightarrow \sin(\alpha) = \frac{a}{c}$	Der **Sinus** eines Winkels ist das Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse.	$\beta \rightarrow \sin(\beta) = \frac{b}{c}$
$\alpha \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{b}{c}$	Der **Kosinus** eines Winkels ist das Verhältnis von Ankathete zur Hypotenuse.	$\beta \rightarrow \cos(\beta) = \frac{a}{c}$

Abbildung 3: aus Mathematik Neue Wege 10 (2009), S. 88

Es sollten aufgrund des operativen Prinzips und kombinatorischer Überlegungen gleich alle trigonometrischen Funktionen eingeführt werden. Da viele Schülerinnen und Schüler Probleme haben, zwischen Ankathete und Gegenkathete zu unterscheiden empfiehlt es sich die Abhängigkeit vom betrachteten spitzen Winkel enaktiv zu veranschaulichen. Dies ist zum Beispiel mit einem aus Pappwänden gebastelten rechtwinkligen Dreieck mit Löchern in den zu den spitzen Winkeln gehörenden Ecken möglich. Die Schülerinnen und Schüler sehen in Abhängigkeit vom (spitzen) Betrachtungswinkel beziehungsweise dem zugehörigen Loch die gegenüberliegende Kathete, bezeichnet als Gegenkathete.
Weiter vermuten viele Schülerinnen und Schüler einen linearen Zusammenhang zwischen Winkelgrößen und ihren Sinus-, Kosinus- und Tangenswerten. Deshalb empfiehlt es sich die Schülerinnen und Schüler zunächst zu einigen Winkelgrößen die zugehörenden Streckenverhältnisse messen und tabellarisch zusammenfassen zu lassen um diese dann graphisch darzustellen, jedoch ohne auf die Eigenschaften trigonometrischer Funktionen einzugehen. [6]

3.3 Bestimmung spezieller Funktionswerte

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras und durch Betrachtung von Hilfsdreiecken mit der Hypothenusenlänge 1 lassen sich von Schülerinnen und Schülern die Sinus- und Kosinuswerte für 30°, 45° und 60° ermitteln. Um andere Werte näherungsweise zu bestimmen lassen sich mit leistungsstarken Gymnasialklassen Näherungsverfahren erarbeiten. Müller (2014) schlägt die Behandlung des CORDIC-Algorithmus vor, so dass der Taschenrechner für Schülerinnen und Schüler keine "Blackbox"mehr darstellt. [4]

3.4 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

Aus der Betrachtung der Innenwinkelsumme von Dreiecken ergeben sich für rechtwinklige Dreiecke folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \sin(90° - \alpha) &= \cos\alpha \\ \text{und } \cos(90° - \alpha) &= \sin\alpha \end{aligned}$$

Über einfaches Umformen ist der Zusammenhang

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{\frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}}{\frac{Ankathete}{Hypothenuse}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

zu erkunden. Bei der Betrachtung rechtwinkliger Dreiecke lässt sich mit dem Satz des Pythagoras der trigonometrische Pythagoras zeigen. Mit den Katheten a und b und der Hypothenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

Weiter lassen sich die Katheten a und b als

$$a = c\sin\alpha \tag{2}$$

$$b = c\cos\alpha \tag{3}$$

darstellen, so dass wir aus den Gleichungen (1), (2) und (3) folgern:

$$\begin{aligned} (c\sin\alpha)^2 + (c\cos\alpha)^2 &= c^2 \\ c^2(\sin\alpha)^2 + c^2(\sin\alpha)^2 &= c^2 \\ c^2((\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2) &= c^2 \\ (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 &= 1 \end{aligned}$$

3.5 Anwendungsaufgaben

Nun sollten Schülerinnen und Schüler in Anwendungsaufgaben das Bestimmen fehlender Seitenlängen und Winkel in rechtwinkligen Dreiecken üben. Einmal sollten mittels Umkehraufgaben die Schülerinnen und Schüler mit der Error-Meldung des Taschenrechners konfrontiert werden mit der Erkenntnis, dass zu entsprechenden Streckenverhältnissen keine zugehörigen Dreiecke existieren (siehe Abb. 4). [6]

Beispiel 12: *Übungsaufgaben zum Sinus* (Marxer und Schmid 2006, S. 17)

- **Bestimme, wenn möglich, die Größe des Winkels α.**

(1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ $\alpha =$ (3) $\sin\alpha = \frac{7}{4}$ $\alpha =$ ...

(2) $\sin\alpha = 0{,}625$ $\alpha =$ (6) $\sin\alpha = 1{,}2$ $\alpha =$ ...

Was fällt dir auf? Versuche den Wert zu finden, ab dem sich alles entscheidend ändert. Begründe deine Antwort.

- **Bestimme, falls möglich, die Größe des Winkels α zeichnerisch.**

(1) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ (2) $\sin\alpha = \frac{5}{4}$ ... (4) $\sin\alpha = 1$ ...

Abbildung 4: aus Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I, S. 252

Weiter ist es vor der Betrachtung beliebiger Dreiecke notwendig das Zerlegen komplexer Figuren in rechtwinklige Teildreiecke zu üben, ebenso wie in Anwendungsaufgaben selbst geeignete rechtwinklige Teildreiecke zu finden. [6] Anschließend können die trigonometrischen Beziehungen auch für spitzwinklige Dreiecke erweitert werden.

4 Diskussion

Die Einführung der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck hat die Vorteile, dass diese Einführung

1. am Vorwissen der Schülerinnen und Schüler anknüpft
2. aus Problemstellungen oder passenden Situationen heraus entwickelt wird und
3. die Forderungen von Malle an einen genetischen Mathematikunterricht erfüllt. [6]

Der große Nachteil ist, dass sich bei der Einführung der trigonometrischen Funktionen am rechtwinkligen Dreieck die trigonometrischen Funktionen zunächst auf spitze Winkel beschränkt sind. Konkret ergeben sich Probleme bei der Herleitung des Sinus- und Kosinussatzes für stumpfwinklige Dreiecke. Dafür werden Symmetrieeigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion benötigt die sich aus Betrachtungen der Dreiecksberechnung nicht ergeben. In Schulbüchern wird dies meist durch Definitionen gelöst, die jedoch nur mit Hilfe eines Permanenzprinzips (Sinus und Kosinus gelten für spitzwinklige und rechtwinklige Dreiecke, also sollten sie auch für stumpfwinklige Dreiecke gelten) begründet werden können und erst später, nach Betrachtung der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis befriedigend hergeleitet werden können.
Am Einheitskreis können die trigonometrischen Funktionen sofort für alle Winkel definiert werden, somit wäre die Einführung am Einheitskreis effizienter. Auch ergeben sich die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion bei der Betrachtung der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis. [6]
Dennoch halte ich es für sinnvoll die trigonometrischen Funktionen zunächst am rechtwinkligen Dreieck einzuführen, da einerseits die oben genannten Vorteile schwer wiegen und andererseits bei der Betrachtung der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis auf Zusammenhänge zwischen Sinus- und Kosinusfunktion (wie zum Beispiel $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$) zurück gegriffen werden kann.

Literatur

[1] Senatsverwaltung für Bildung Jugend und Sport Berlin. *Mathematik - Berliner Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I.* 2006.

[2] Günter Graumann. Eine genetische einführung in die trigonometrie. *Beiträge zum Mathematikunterricht: 21. Bundestagung vom 10.3. bis 13.3. 1987 in Wuppertal*, 1987.

[3] Katja Maaß. Application-oriented teaching and problem-oriented teaching: the example trigonometry. *Der Mathematikunterricht*, 44(3):9–22, 1998.

[4] Jan Hendrik Müller. Wie berechnet der taschenrechner eigentlich sinuswerte? In *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 1*, pages 85–98. Springer, 2014.

[5] Otto Toeplitz. Das problem der universitätsvorlesungen über infinitesimalrechnung und ihrer abgrenzung gegenüber der infinitesimalrechnung an den höheren schulen. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 36:88–99, 1927.

[6] Hans-Georg Weigand, Andreas Filler, Reinhard Hölzl, and Sebastian Kuntze. *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Springer, 2014.

[7] E. Wittmann. *Fundamental problems of mathematics teaching. Grundfragen des Mathematikunterrichts.* 1981.