Einführung in die Trigonometrie

von: Franz Friedrich
Datum: 12.05.2014

Einführung in die Trigonometrie

- Grundlagen der Ähnlichkeitslehre
- Definition von Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck
- Bestimmung spezieller Funktionswerte
- Beweise einiger Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens
- Schlussfolgerungen für die Einführung der Trigonometrie in der Schule
- Einstieg in die Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck (Beispiele + Aufgaben)

Genetische Unterrichtsweise

Nach Günter Graumann[1]:

- orientiert sich an historischer Begriffsgenese
- berücksichtigt die geistige Entwicklung des Lernenden
- verfolgt die Absicht, den Sinn der Behandlung des Themas zu verdeutlichen

E. C. Wittmann[2]:

- ist an den natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet

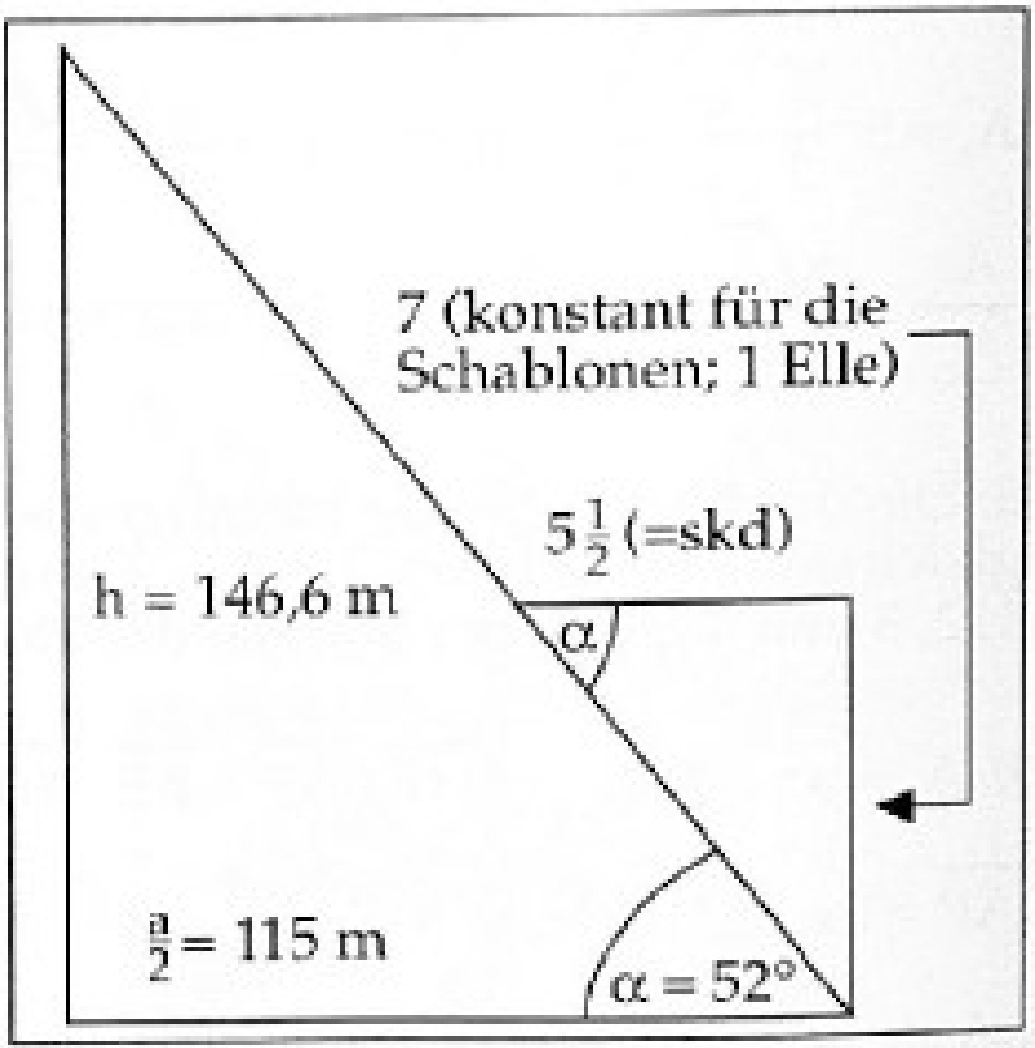


Abb. 3: Der Rücksprung (skd) zur Messung des Neigungswinkels bei Pyramiden. Im Bild sind die Maße der Cheops-Pyramide angegeben.

Quelle: [3]: Mathematik lehren, (1990) 42, S. 14

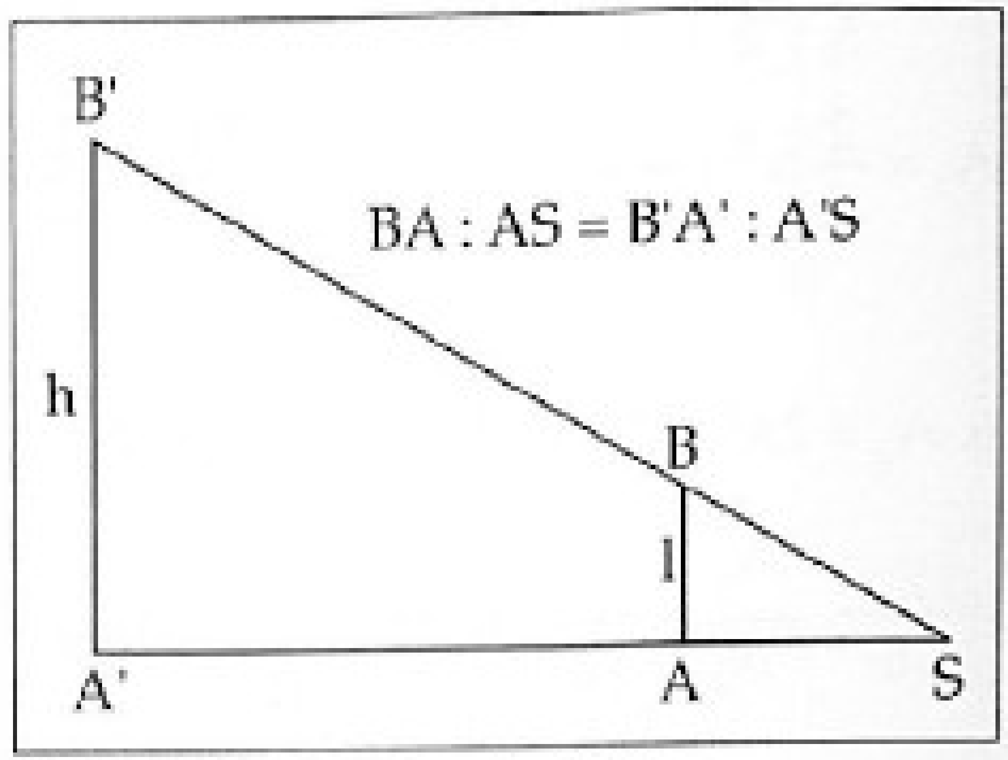


Abb. 2: Höhenmessung des Thales

Quelle: [3]: Mathematik lehren, (1990) 42, S. 14

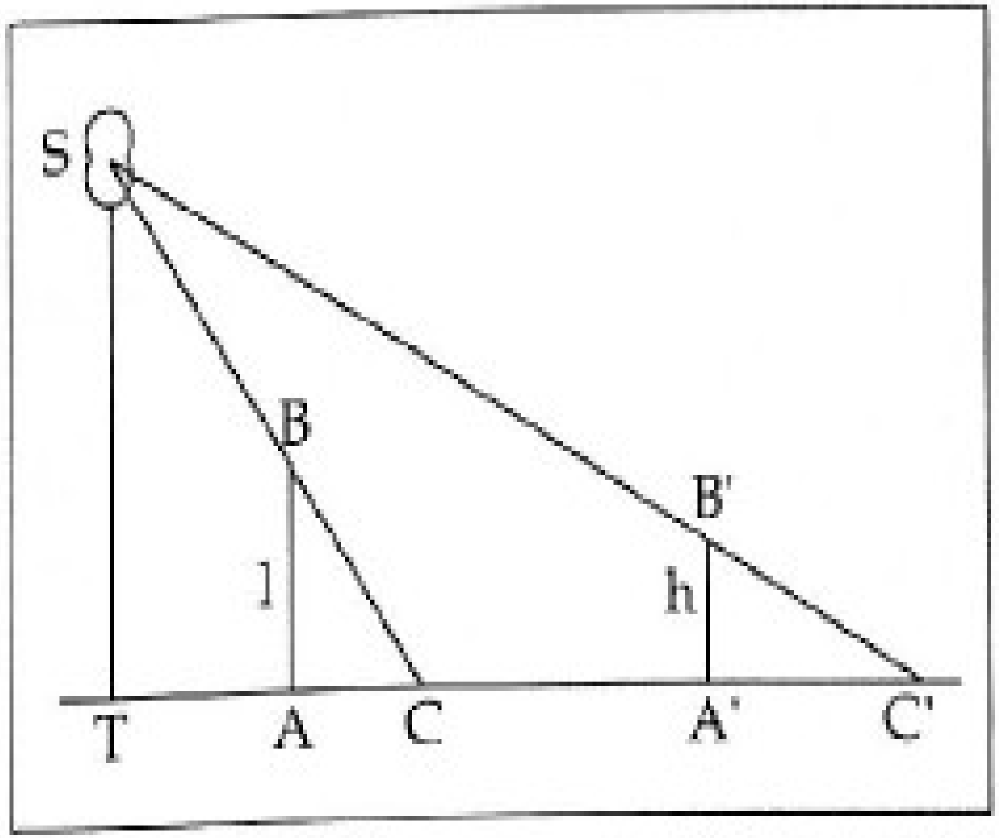


Abb. 5: Das Höhenmessungsverfahren versagt, wenn die Lichtstrahlen nicht parallel sind

Quelle: [3]: Mathematik lehren, (1990) 42, S. 15

Grundlagen der Ähnlichkeitslehre

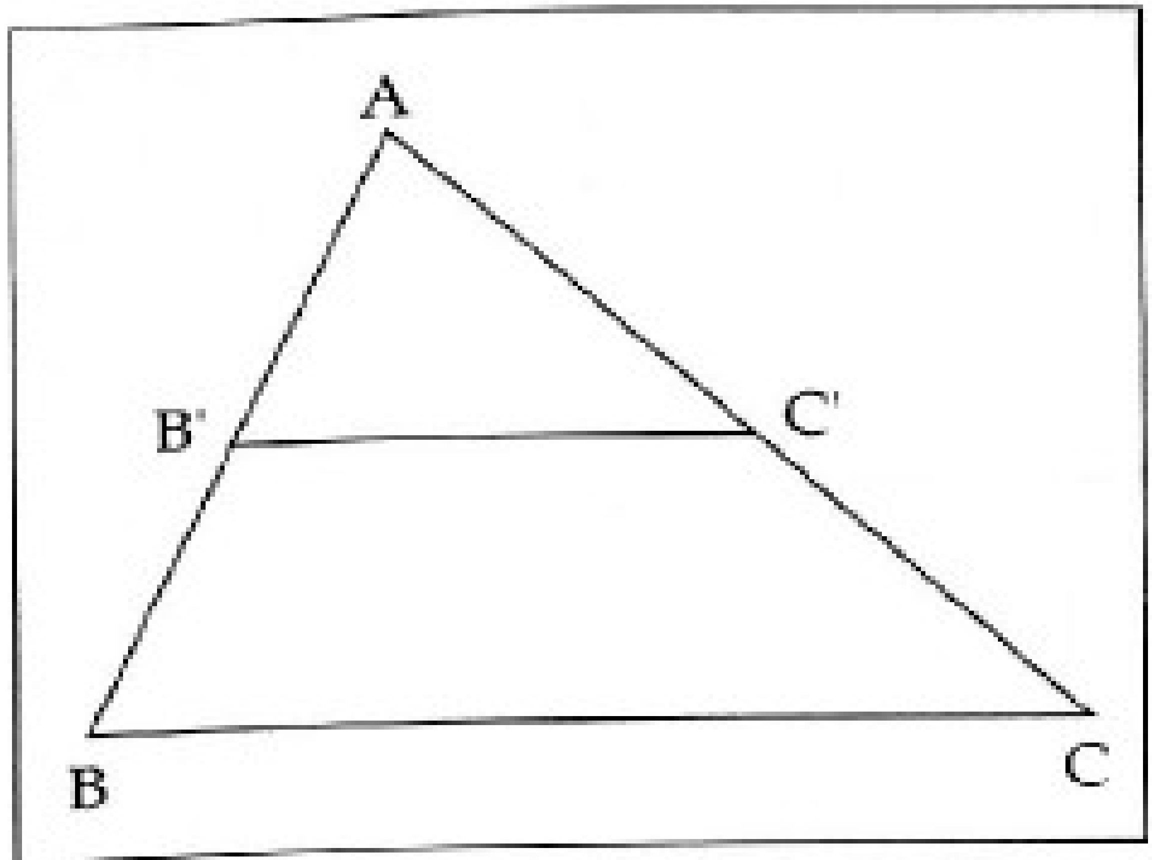
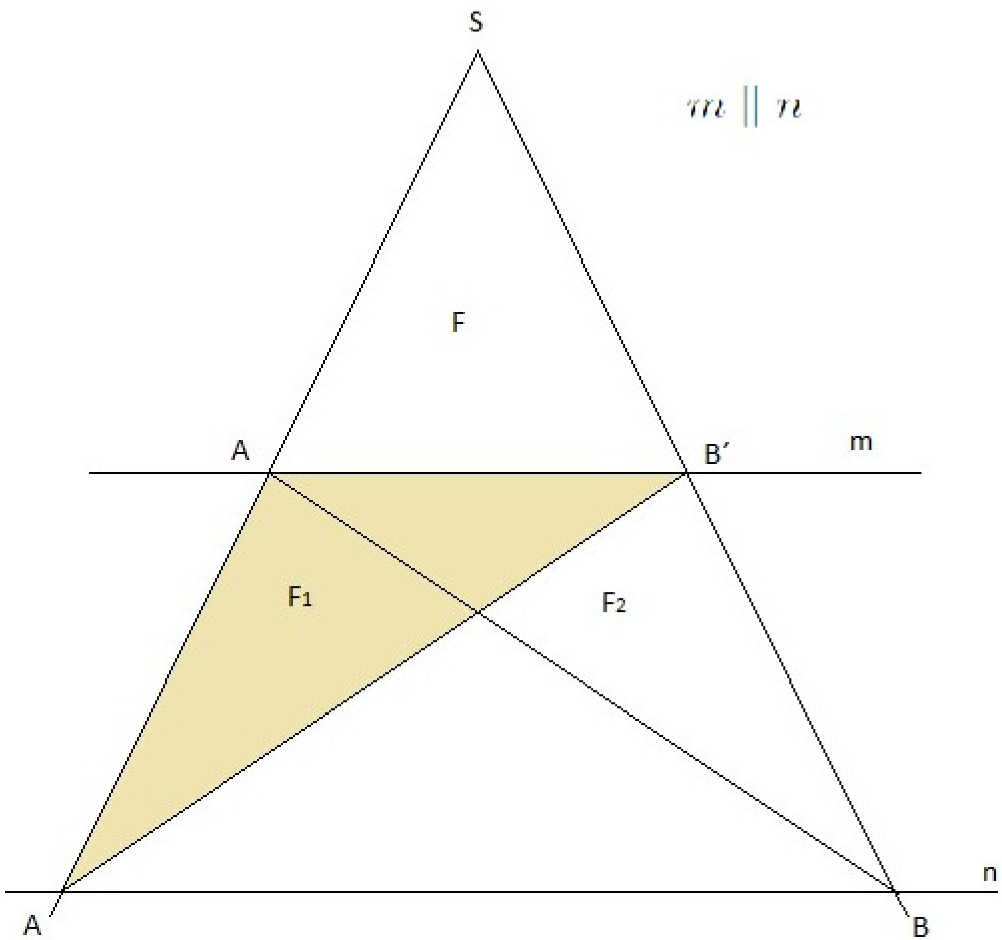


Abb. 6: Zur Euklidschen Fassung des Strahlensatzes (Elemente VI, 2). $AB' : BB' = AC' : CC'$ genau dann, wenn $B'C' \parallel BC$

Quelle: [3]: Mathematik lehren, (1990) 42, S. 15

Beweis des 1. Strahlensatzes



<u>Behauptung:</u> 1. Strahlensatz $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$

<u>Beweis:</u>

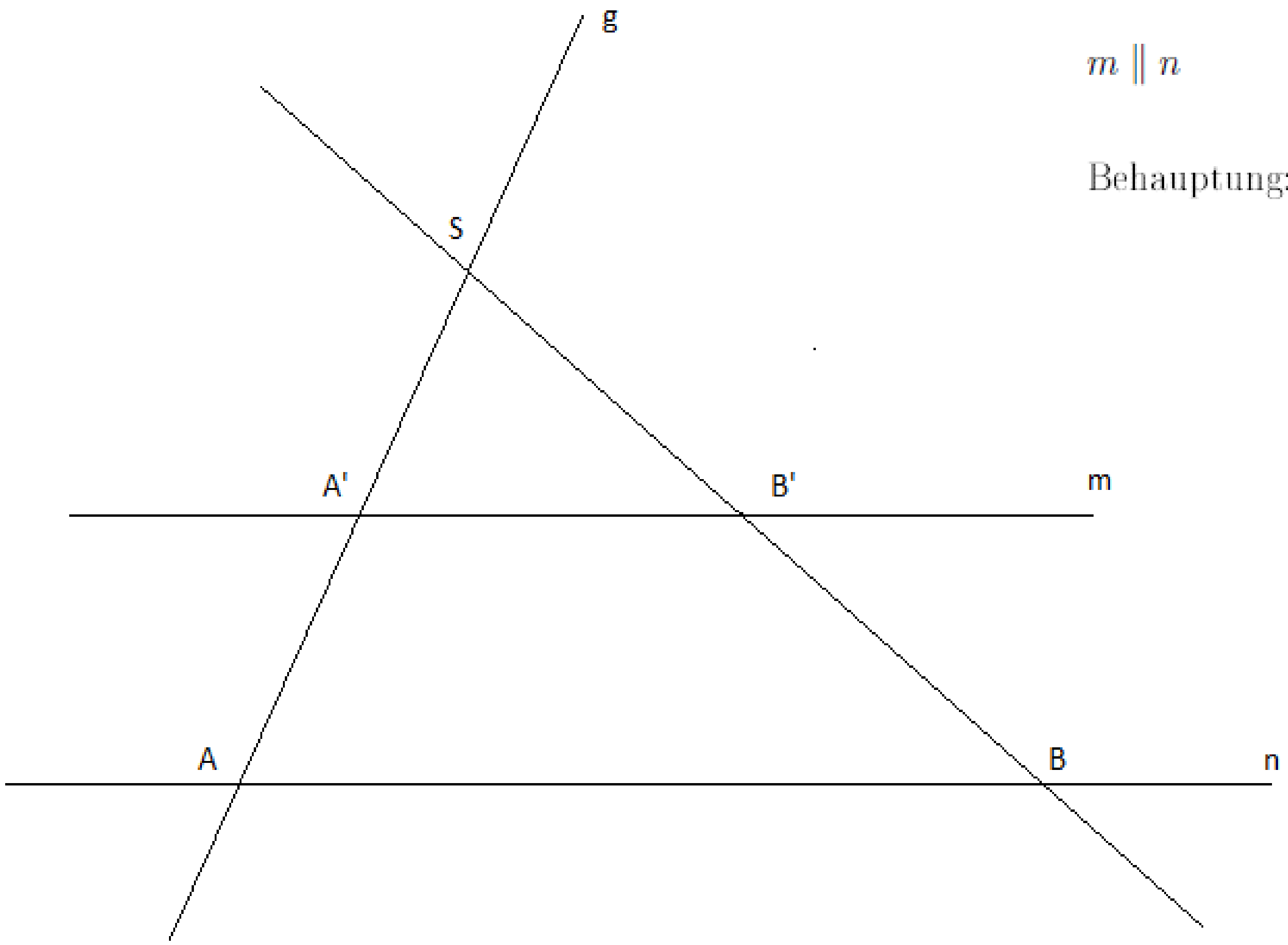
1. $\Delta SA'B'$ und $\Delta A'AB'$ haben bezüglich ihrer Grundseiten $\overline{SA'}$ und $\overline{A'A}$ die gleiche Höhe.

2. Entsprechendes gilt für $\Delta SB'A' und \Delta B'BA'$

3. Nach dem Satz von Euklid über die Ähnlichkeit von (Parallelogrammen und) Dreiecken folgt:
$\frac{F}{F_1} = \frac{a'}{a}$ und $\frac{F}{F_2} = \frac{b'}{b}$
$\Rightarrow F_1 * \frac{a'}{a} = F_2 * \frac{b'}{b}$

4. Nach Voraussetzung besitzen $\Delta A'B'A$ und $\Delta A'B'B$ die gleiche Höhe bezüglich der gemeinsamen Grundseite $\overline{A'B'}$
$\Rightarrow F_1 = F_2 \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ q.e.d.

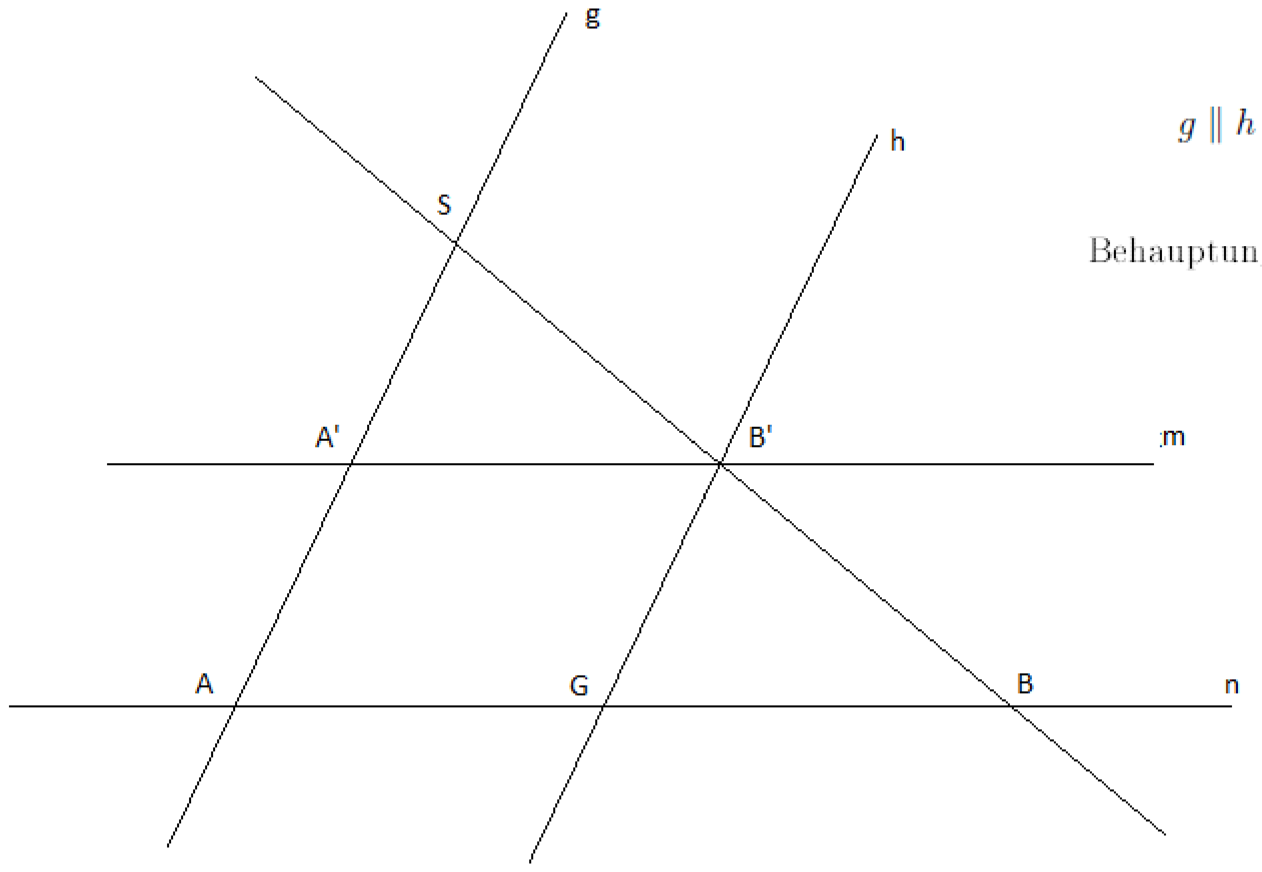
Beweis des 2. Strahlensatzes



$m \parallel n$

Behauptung: $\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

Beweis des 2. Strahlensatzes



$g \parallel h$ und $m \parallel n$

Behauptung: $\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

Die zentrische Streckung

- Eine geometrische Abbildung heißt zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckfaktor k>0, wenn für jeden Punkt P in der Ebene gilt:
  - Z, P und P' liegen auf einer Halbgerade mit Anfangspunkt Z
  - P' liegt k-mal so weit entfernt wie P

Die zentrische Streckung

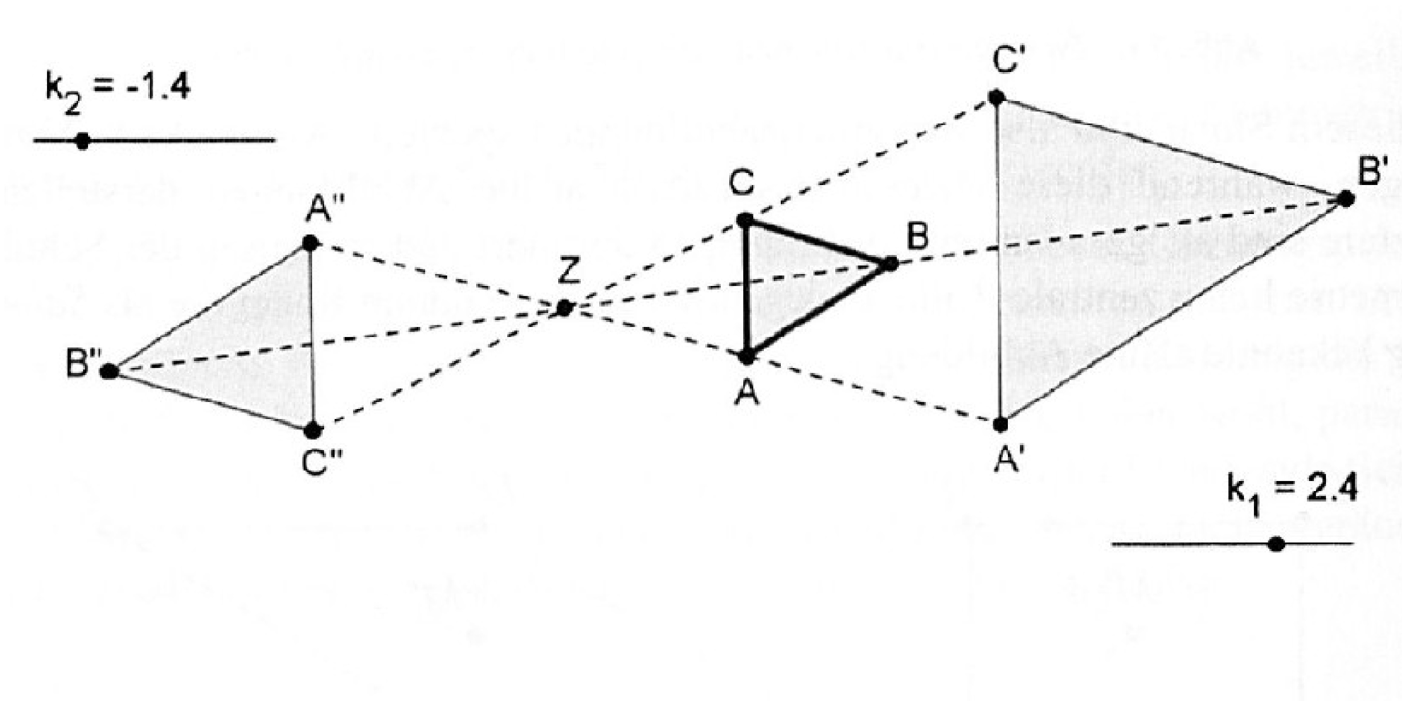


Abb. 13: Wirkung unterschiedlicher Streckfaktoren

Quelle: [4]: S. 226

Ähnlichkeitssätze

1. Ähnlichkeitssatz:
   - Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei (und damit auch drei) Winkeln übereinstimmen
2. Ähnlichkeitssatz:
   - Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und dem Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen
3. Ähnlichkeitssatz:
   - Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den entsprechenden Seitenverhältnissen übereinstimmen
4. Ähnlichkeitssatz:
   - Dreiecke sind ähnlich, wenn sie im Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen

Ähnlichkeitssätze

$\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta' \Rightarrow ABC \sim FEG$

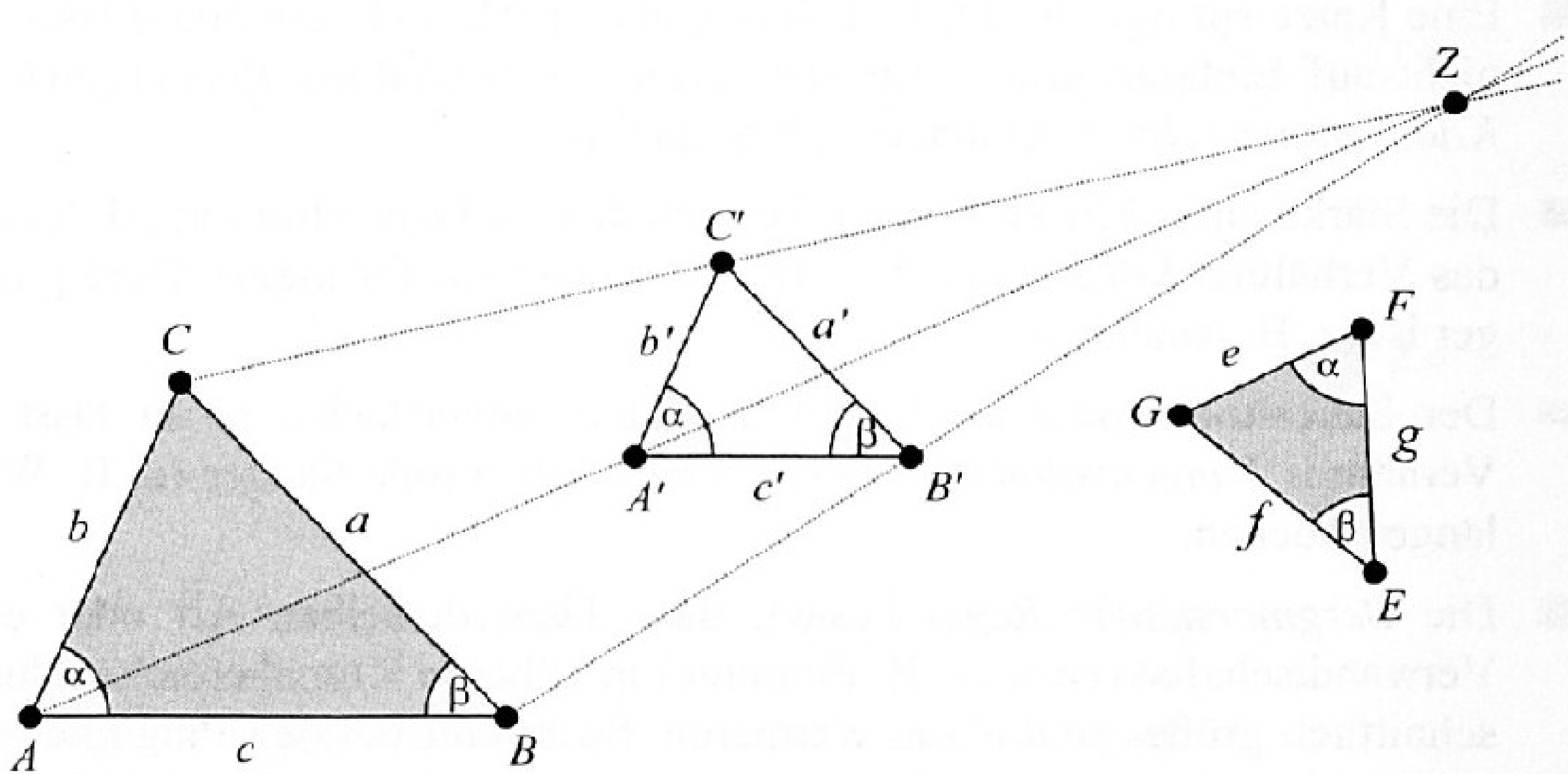
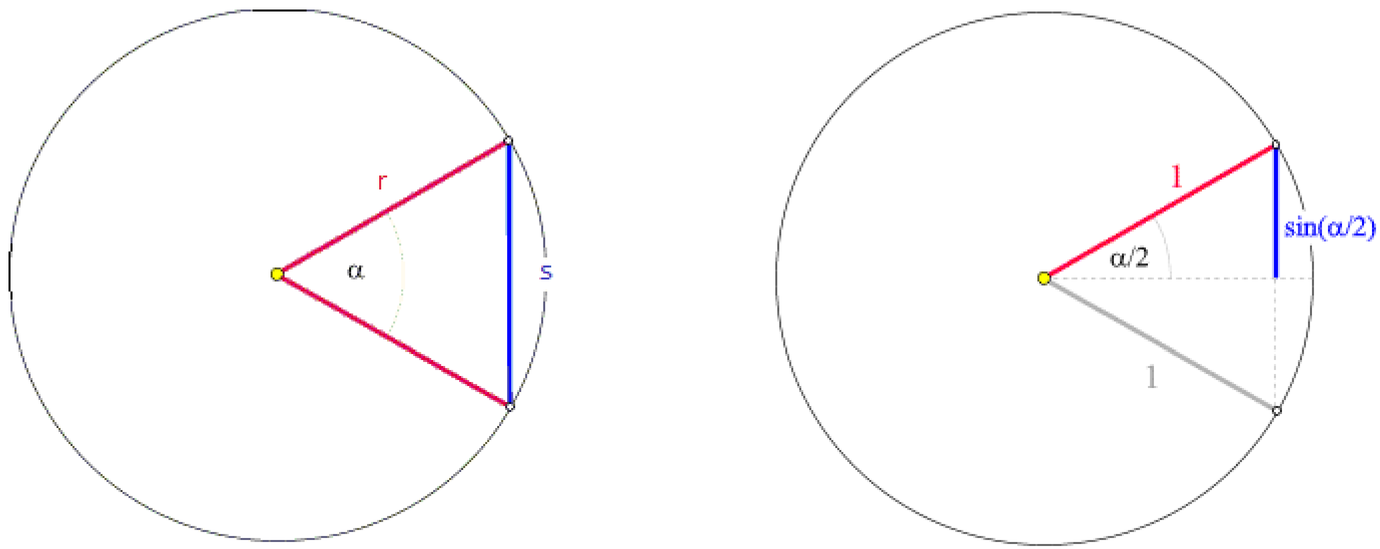


Abb. 15: Beweisfigur zum 1. Ähnlichkeitssatz

Quelle: [4]: S. 228-229



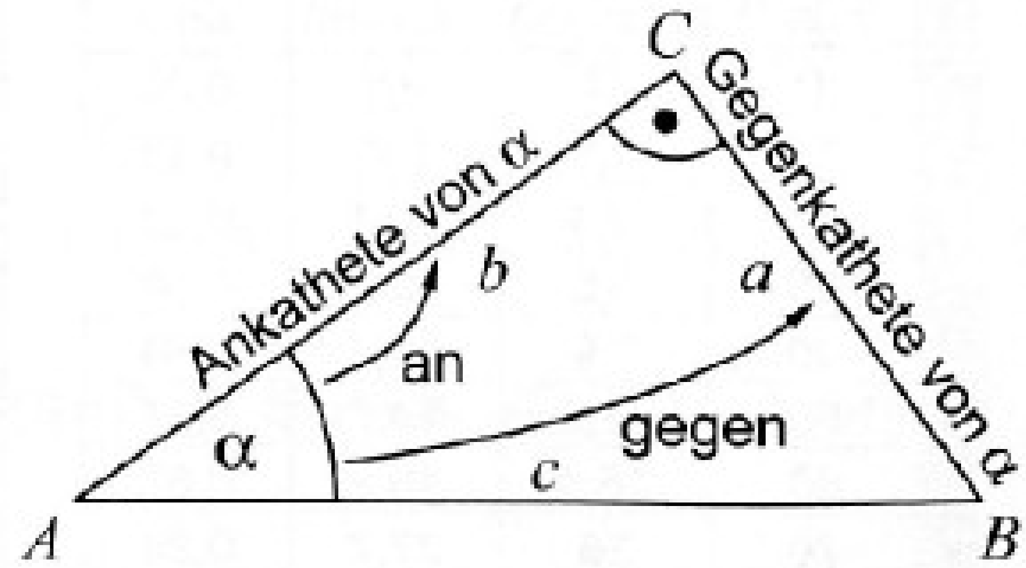
$$\frac{s}{r} = chord(\alpha) = 2sin(\frac{\alpha}{2})$$

Sinus, Kosinus und Tangens

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

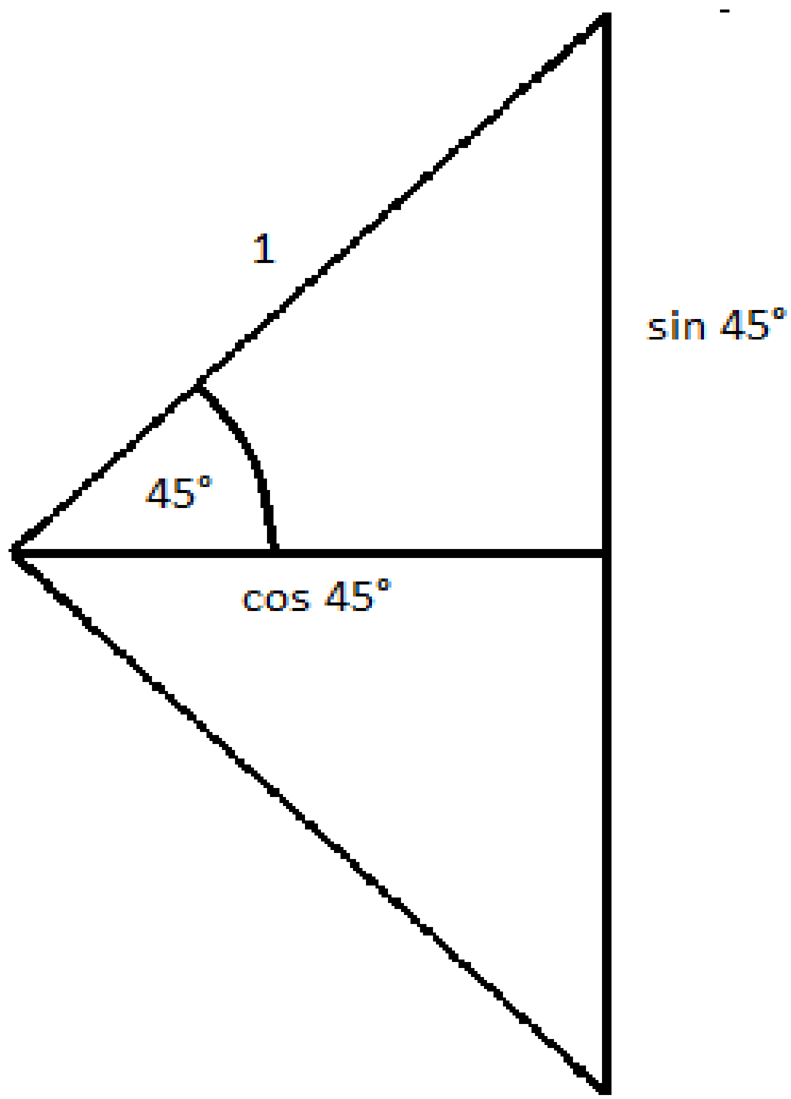
$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Ankathete von }\alpha}$$



Quelle: [4]: S. 249

Bestimmung einiger Funktionswerte

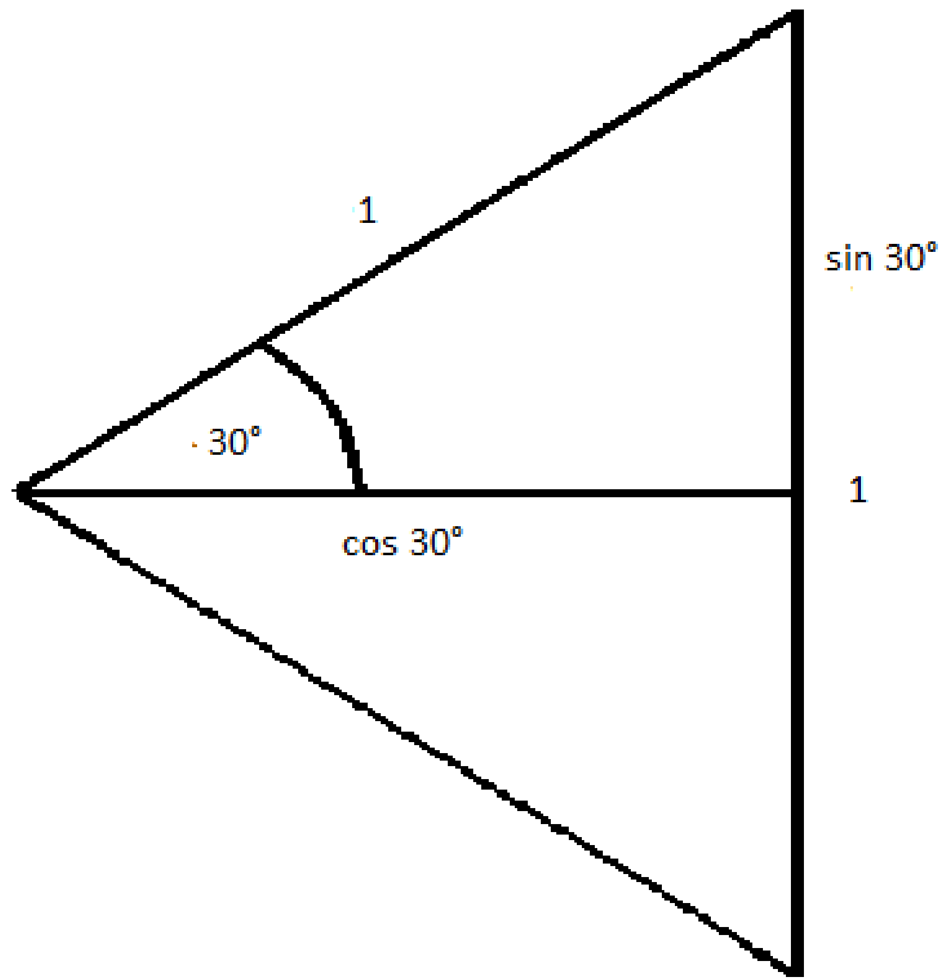


$$sin\ (45°) = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Bestimmung einiger Funktionswerte

$$sin\ (30°) = \frac{1}{2}$$

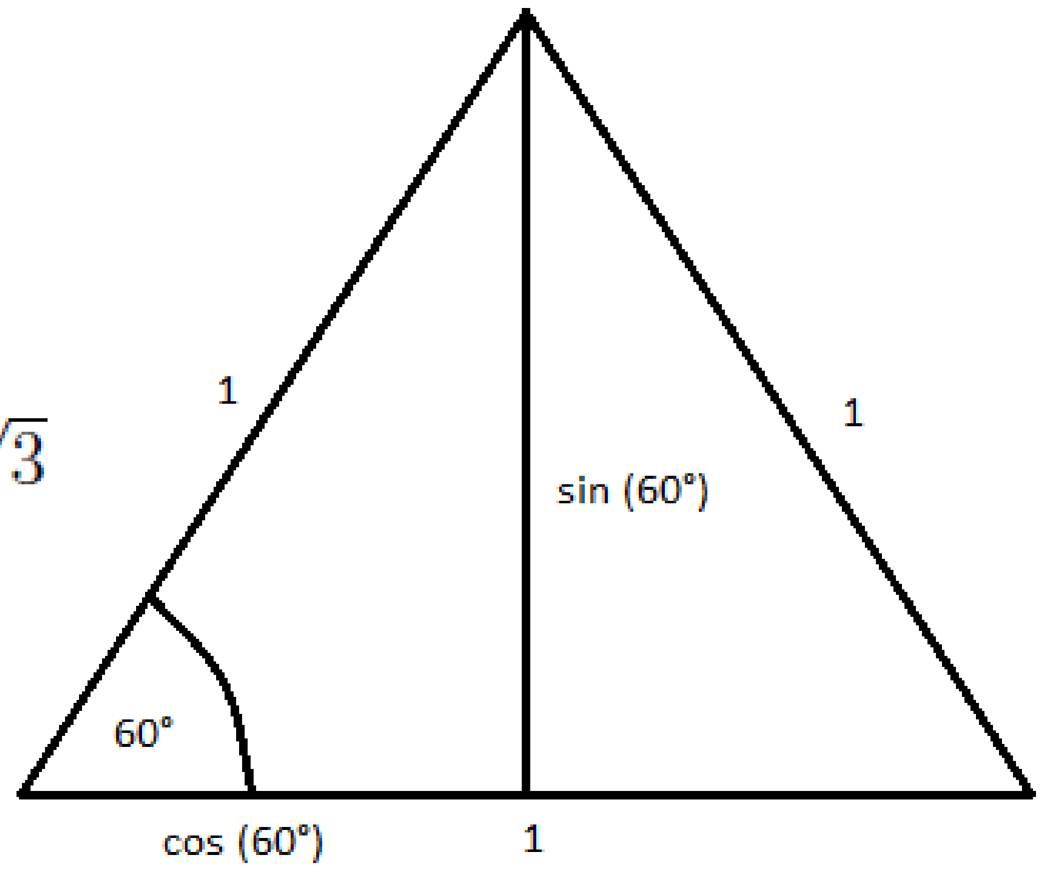
$$cos\ (30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$



Bestimmung einiger Funktionswerte

$$cos\ (60°) = \frac{1}{2}$$

$$sin\ (60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$



Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

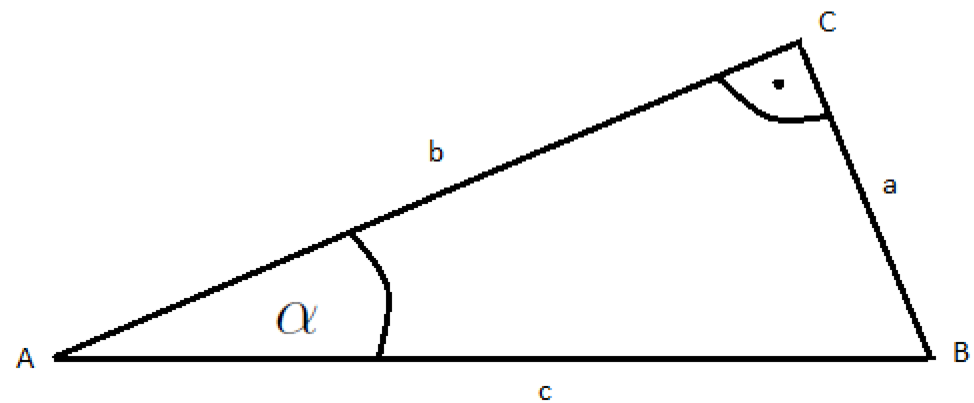
$$sin\ (90^\circ \text{ - a}) = cos(a) \text{ und } cos(\ 90^\circ \text{ - a}) = sin(a)$$

$$tan(a) = \frac{sin(a)}{cos(a)}$$

Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

trigonometrischer Pythagoras:

$$(sin\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$$



<u>Beweis:</u> 1. $a^2 + b^2 = c^2$

2. $a = c * sin\ \alpha$ und $b = c * cos\ \alpha$

daraus folgt: $(sin\ \alpha * c)^2 + (cos\ \alpha * c)^2 = c^2$

$$(sin\ \alpha)^2 * c^2 + (cos\ \alpha)^2 * c^2 = c^2$$

$$(sin\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$$

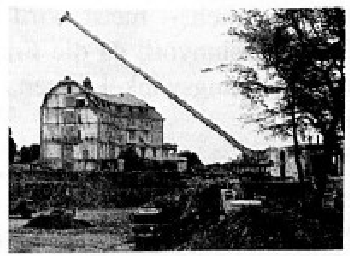
Schlussfolgerungen

- es hat eine zunehmende Algebraisierung stattgefunden
  - Wittmann beschreibt die „Trigonometrie als Algebraisierung der Kongruenzsätze“

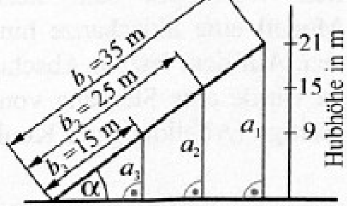
Einstiege am rechtwinkligen Dreieck

Beispiel 3: *Autokran* (aus Lernstufen Mathematik 10: Leppig 1995, S. 116)

Der Ausleger des Autokrans ist 9,5 m lang und kann bis auf eine Länge von 35 m ausgefahren werden. Man kann ihn bis zu einem Winkel von höchstens 80° gegen die Waagrechte aufrichten. Vom Winkel und von der Länge des Auslegers hängen seine Tragkraft und die Hubhöhe ab, um die er die Last heben kann. Die Abhängigkeit der Hubhöhe von der Länge des Auslegers bei einem festen Winkel können wir in einem Schaubild (Maßstab 1:1000) aufzeichnen.

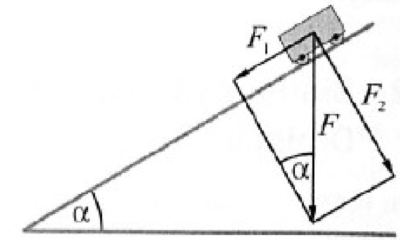


Für die drei im Schaubild gezeichneten Fälle berechnen wir den Quotienten aus der Hubhöhe und der Länge des Auslegers.

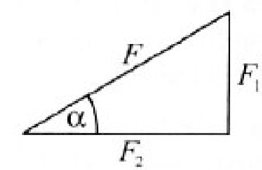


Beispiel 4: *Bestimmung von Kräften an der geneigten Ebene* (Malle 2001)

Ein Schrägaufzug steigt unter dem Winkel $\alpha = 30°$ an und hat das Gewicht $F = 5000$ N (Newton). Mit welcher Kraft F_1 wird er längs des Gleises hinuntergezogen? Mit welcher Kraft F_2 wird er auf das Gleis gedrückt?

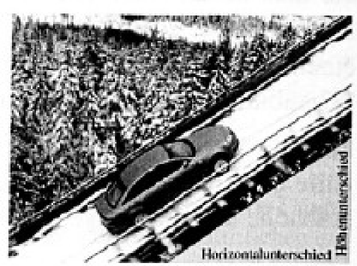


Diese Fragen können auch folgendermaßen gestellt werden:
Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man den Winkel α und die Hypotenusenlänge F. Man ermittle die Gegenkathetenlänge F_1 und die Ankathetenlänge F_2.



Beispiel 5: *Einstieg in die Trigonometrie über den Zusammenhang zwischen Anstieg (Steigung) und Steigungswinkel*

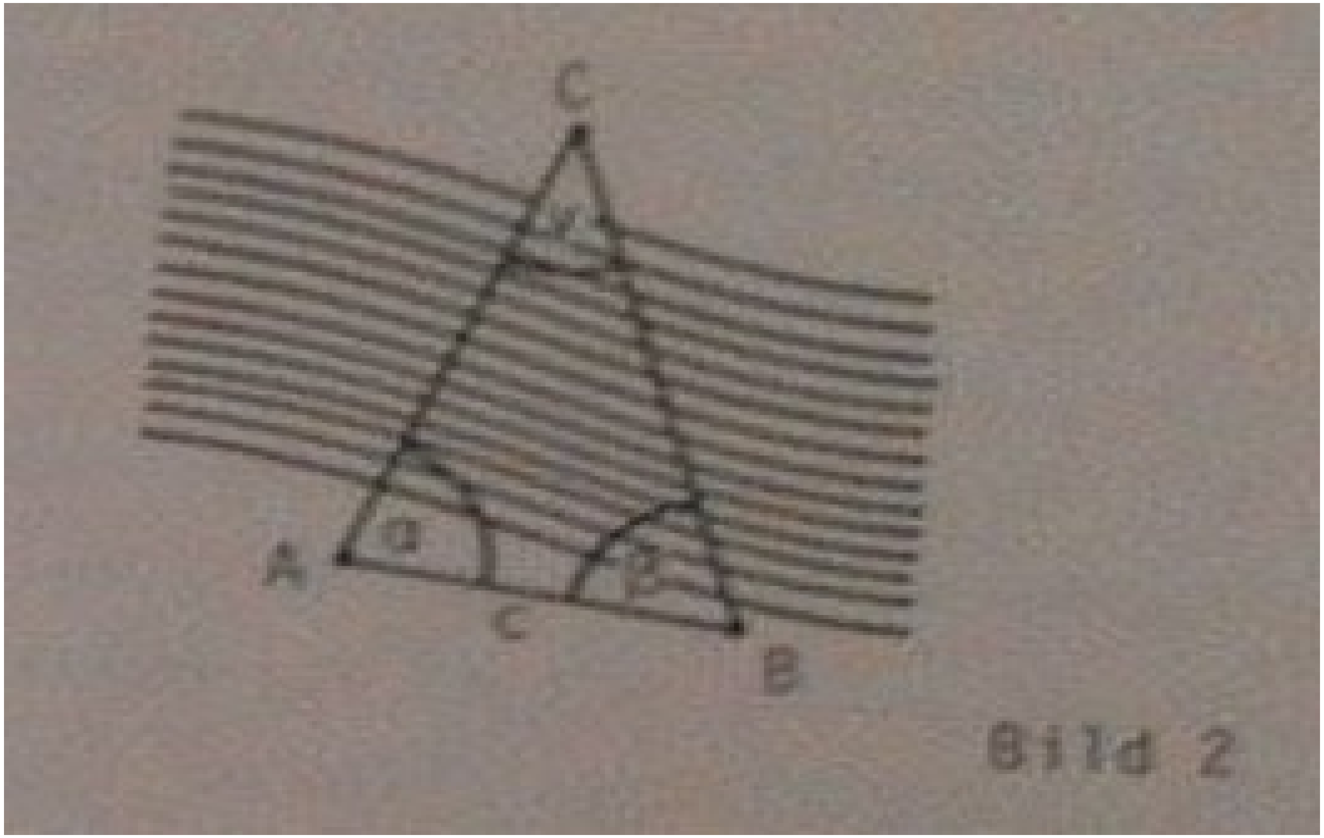
Ein großer Automobilkonzern hat für einen Werbespot sein neues Pkw-Top-Modell eine Skischanze hinauffahren lassen. Auf dem letzten Abschnitt der Schanze wurde eine Steigung von fast 80% bewältigt. (Abbildung aus Koullen 2008)



Erläutere mit Hilfe der Abbildung den Begriff Steigung. Erkläre, wie die Angabe 80 % Steigung entstehen kann.

Quelle: [4]: S.245-247

Einstiege am rechtwinkligen Dreieck



Quelle: [5]: S. 356

Einstiege am rechtwinkligen Dreieck

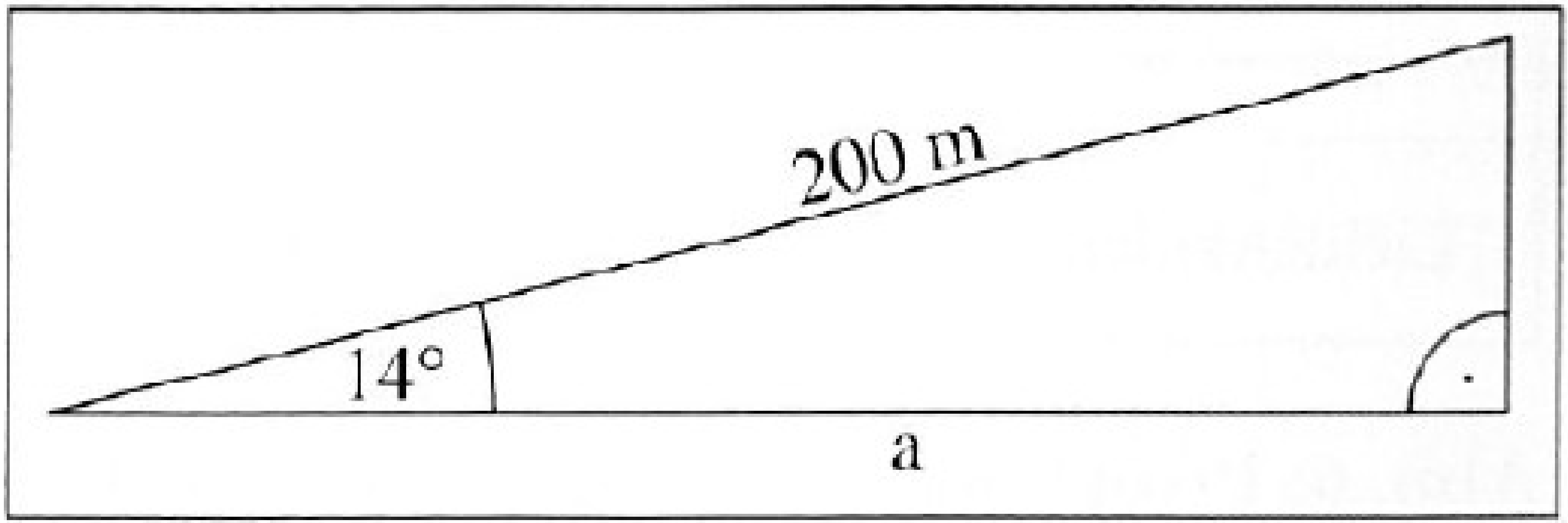


Abb. 7: Ein ansteigendes Straßenstück, von der Seite dargestellt

Quele: [6]: S. 15

Übungsaufgaben[6]:

- Ein Wegstück hat auf einer Wanderkarte (Maßstab 1:25000) eine Länge von 0,7cm. Der Karte ist zu entnehmen, dass dieses Wegstück eine Höhe von 20 m überwindet. Wie lang ist der Weg in der Realität mindestens?
- Am Eingang eines Gebäudes soll eine Rampe für Rollstuhlfahrer gebaut werden. Der Höhenunterschied von 1 m muss überwunden werden. Wie viel Platz vor dem Haus benötigt die Rampe, wenn sie im Winkel von 10° ansteigen soll und eine Breite von 1,50 m hat? Wie lang müsten die dazu nötigen Holzlatten sein?

Übungsaufgaben[6]:

- Schüler wollen für ihre Inline-Skater eine Sprungschanze bauen. Diese soll unter einem Winkel von 13° ansteigen und eine Fahrbahnlänge von 2 m haben. Wie viel Standfläche benötigt die Sprungschanze, wenn sie 1 m breit ist? Welche Höhe hat der Absprungpunkt über der Ebene (in der die Schüler anlaufen)?

Beispiele aus Schulbüchern

Winkelbeziehungen in rechtwinkligen Dreiecken

1

Der Winkel, den ein Sonnenstrahl gegen die horizontale Erdoberfläche bildet, wird Sonnenhöhe genannt. Um an einem bestimmten Ort auf der Erde die Sonnenhöhe zu bestimmen, hat man schon im Altertum einen Stab so weit von dem Ort senkrecht in die Erdoberfläche gesteckt, dass der Schatten des Stabes gerade an dem Ort endete.

a) Sprecht über die altertümliche Methode zur Bestimmung der Sonnenhöhe. Findet weitere Möglichkeiten, die Sonnenhöhe zu bestimmen.

b) Ermittelt zeichnerisch die Sonnenhöhe, wenn ein 2 m langer Stab eine Schattenlänge von 2,47 m hat. Welche Schattenlänge hätte zu gleicher Zeit am selben Ort ein 1 m langer Stab bzw. ein 10 m hoher Baum?

2

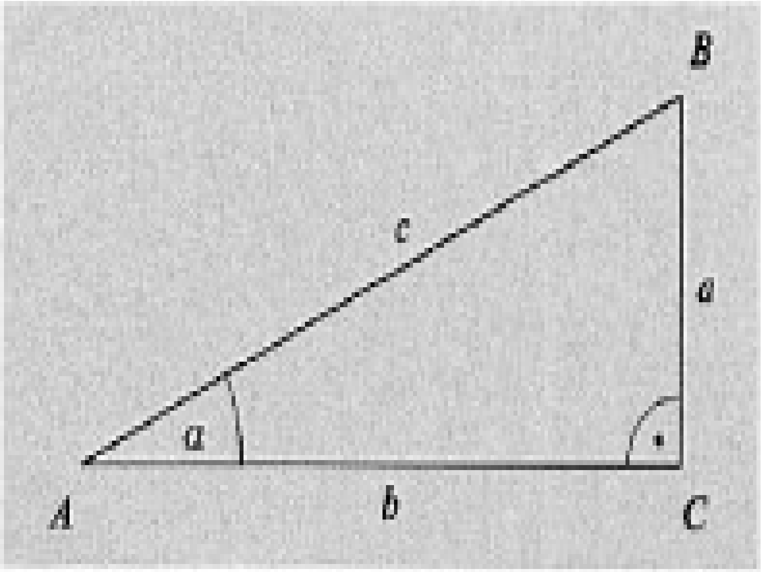
a) Ermittle zeichnerisch die Länge eines Stabes, dessen Schatten bei einer Sonnenhöhe von 42° gerade 2,0 m (2,4 m; 2,8 m) lang ist.

b) Wie lang ist der Schatten eines 1,0 m (1,5 m; 2,0 m) langen Stabes bei einer Sonnenhöhe von 45°?

Quelle: Mathematik plus (Gymnasium Klasse 10): Bluhm u.a. 2009, S. 110

4

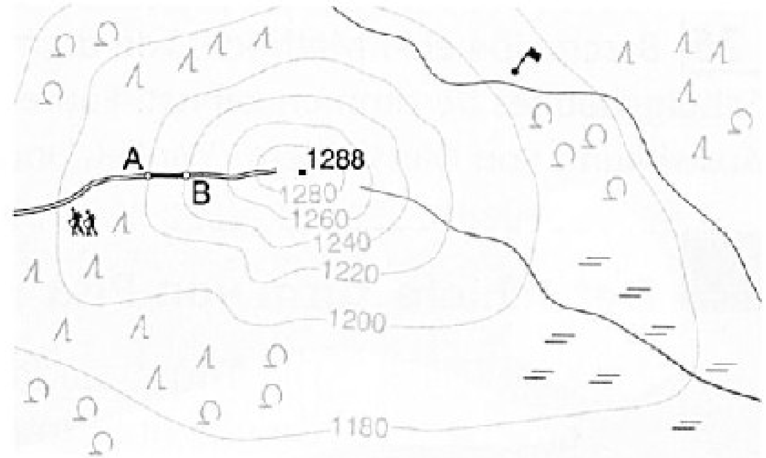
Zeichne fünf rechtwinklige Dreiecke mit einem gemeinsamen (Ausgangs-)Punkt A und dem gleichen Winkel α ins Heft. Miss in jedem der gezeichneten Dreiecke alle Seitenlängen und berechne jeweils alle möglichen Seitenverhältnisse. Notiere alle Ergebnisse in einer Tabelle. Begründe auffällige Ergebnisse.



Quelle: Mathematik plus (Gymnasium Klasse 10): Bluhm u.a. 2009, S. 110

19 *Höhenlinien*

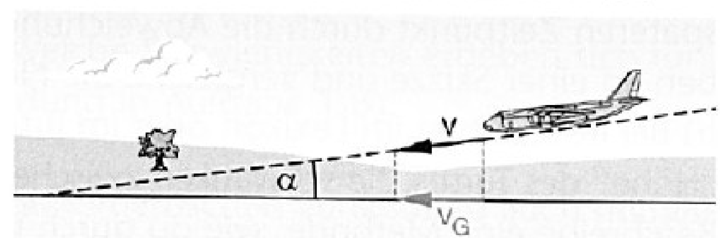
Auf einer Karte im Maßstab 1 : 50 000 sind Höhenlinien eingetragen. Unter welchem Winkel steigt die Straße von A nach B an, wenn der Abstand der benachbarten Höhenlinien dort mit 8 mm gemessen wurde?



21 Ein Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von $v = 300$ km/h die Landebahn an. Die Flugrichtung bildet dabei mit der Horizontalen konstant einen Winkel von $\alpha = 8°$.

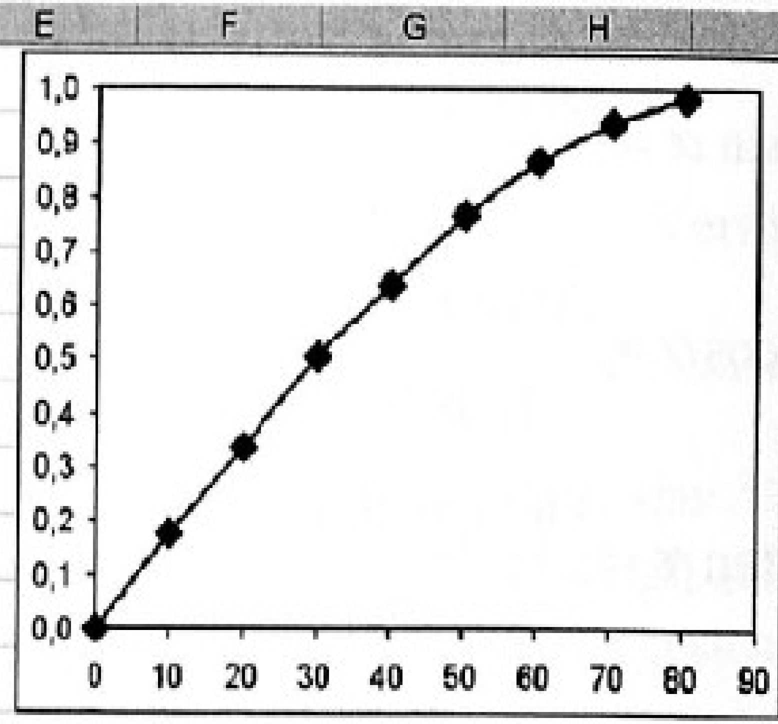
a) Um wie viel m sinkt das Flugzeug dabei pro Minute?

b) Welche „Geschwindigkeit über Grund" V_G hat dabei das Flugzeug?



Quelle: Mathematik Neue Wege 10: Lergenmüller 2009, S. 91

	A	B	C	D
1	α (in °)	a (in cm)	c (in cm)	sin α
2	0	0	9,5	0,00
3	10	1,7	9,6	0,18
4	20	3,4	10,1	0,34
5	30	5,5	10,9	0,50
6	40	7,9	12,4	0,64
7	50	11,3	14,7	0,77
8	60	16,4	18,9	0,87
9	70	26	27,7	0,94
10	80	53,7	54,5	0,99

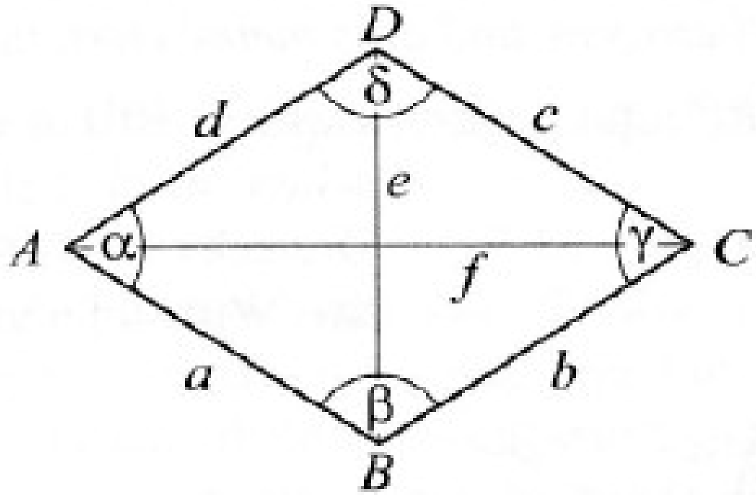


Quelle: [4]: S. 250

Anwendungsaufgaben

Beispiel 13: *Übungsaufgabe zu trigonometrischen Beziehungen*
(aus dem Schulbuch „Mathematik Plus 10“: Pohlmann/Stoye 2009, S. 118)

Berechne die gesuchten Größen einer Raute (Rhombus) $ABCD$.



a) Gegeben: $b = 4{,}5$ cm, $\alpha = 53°$ Gesucht: β, e, f

b) Gegeben: $\alpha = 62°$, $e = 4{,}8$ cm Gesucht: β, a, f

c) Gegeben: $\beta = 128°$, $f = 4{,}6$ cm Gesucht: α, a, e

d) Gegeben: $e = 5{,}3$ cm, $f = 2{,}9$ cm Gesucht: α, β, a

Quelle: [4]: S. 253

Einführung der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

- das Zurückführen von Konstruktions-, Vermessungs- und Berechnungsproblemen auf Dreiecke entspricht einer „Fundamentalen Idee des Geometrieunterrichts“
- knüpft an frühere Unterrichtsinhalte an
- entspricht von Malle aufgestellten Forderungen an einen genetischen Mathematikunterricht

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Quellen

- [1] Graumann, G. (1987): Beiträge zum Mathematikunterricht: 21. Bundestagung vom 10.3. bis 13.3.1987 in Wuppertal. Bad Salzdetfurth: Franzbecker: S. 146–149.
- [2] Wittmann, E. Ch. (1981): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg: Braunschweig: S.130
- [3] Thiele, R. (1990): Mathematik lehren, (1990) 42, S. 14-18
- [4] Weigand et al. (2014): Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I, Springer Spektrum: Heidelberg
- [5] Wittmann, E. Ch. (1987): Elementargeometrie und Wirklichkeit. Vieweg: Braunschweig: S. 356f
- [6] Maas, K. (1998): Der Mathematikunterricht, (1998) 3, S. 9-22
- [7] Ludwig, M. (2004): Mathematik lehren, (2004) 124, S. 54-57