Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2015/16

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis I** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 2

Abgabe am 02. 11. 2015

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 2.1

Beweisen Sie, dass für beliebige Mengen A, B, C gilt:
Falls $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ und $C \subseteq A$, so sind die Mengen A, B und C identisch.
Hinweis: Wenden Sie die in der Vorlesung bewiesenen Eigenschaften der Inklusion an. **2 Pkt.**

Aufgabe 2.2

Es seien X eine beliebige Menge sowie $A \subseteq X$, $B \subseteq X$ und $C \subseteq X$.

(a) Weisen Sie nach: $(X \setminus A) \cup A = X$.
Zeichnen Sie dazu ein Venn-Diagramm und beschreiben Sie den Sachverhalt in Worten. **2 Pkt.**

(b) Vereinfachen Sie die folgenden Mengenausdrücke und zeichnen Sie entsprechende Venn-Diagramme.

- $(A \cap B) \cup B$
- $(A \setminus B) \cup B$ **2 Pkt.**

(c) Weisen Sie nach: $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ **1 Pkt.**

Aufgabe 2.3

(a) Beweisen Sie, dass die durch $(a;b) \sim (c;d) \;:\Leftrightarrow\; ad = cb$ definierte Relation $\sim$ (Quotientengleichheit) eine Äquivalenzrelation in der Menge $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ der Paare $(a;b)$ ganzer Zahlen (mit $b \neq 0$) ist. **4 Pkt.**

(b) Entscheiden Sie für die Teilbarkeitsrelation $|$ in $\mathbb{N}$ ($a|b :\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}: b = ma$), ob es sich um eine reflexive, eine irreflexive, eine symmetrische, eine asymmetrische, eine antisymmetrische, eine transitive Relation handelt. Beweisen Sie Ihre Antworten bzw. geben Sie Gegenbeispiele an. **3 Pkt.**

Aufgabe 2.4

(a) Weisen Sie nach, dass für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ **2 Pkt.**

(b) Weisen Sie nach, dass man die Summe der ersten n Kubikzahlen berechnen kann, indem man die Summe der ersten n natürlichen Zahlen quadriert, dass also gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$ **4 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**