Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2015/16

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis I** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 3

Abgabe am 09. 11. 2015

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 3.1

Weisen Sie nach, dass für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} q^k = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ **2 Pkt.**

Aufgabe 3.2

Weisen Sie nach, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $6 \mid (n^3 - n)$ **2 Pkt.**

(b) $9 \mid \left(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right)$ **3 Pkt.**

Aufgabe 3.3

(a) Überprüfen Sie, für welche natürlichen Zahlen n die Ungleichung $2^n > n^2$ gilt. Beweisen Sie Ihre Behauptung mittels vollständiger Induktion.
Hinweis: Sie können die in der Vorlesung bewiesene Ungleichung $2^n > 2n + 1$ (für $n \geq 3$) benutzen. **2 Pkt.**

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ die folgende Ungleichung erfüllt ist: $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$
Hinweis: Formen Sie die Induktionsbehauptung (unter Nutzung der Induktionsvoraussetzung) so um, dass Sie die Bernoulli-Ungleichung anwenden können. **3 Pkt.**

(c) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, für welche die Ungleichung $3^{2^n} < 2^{3^n}$ gilt, und beweisen Sie Ihre Behauptung. **2 Pkt.**

Aufgabe 3.4

(a) Zeigen Sie mithilfe des Binomischen Lehrsatzes:
$(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. **3 Pkt.**

(b) Beweisen Sie die folgende Aussage: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ : \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$
Hinweis: Der Beweis lässt sich mittels vollständiger Induktion führen. Überlegen Sie zunächst, ob Induktion über m oder über n eher zum Ziel führt. **3 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**