

## Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis I** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

### Übungsserie 4

Abgabe am 16. 11. 2015

#### Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

#### Aufgabe 4.1

(a) Weisen Sie nach, dass die Null in  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  kein multiplikativ inverses Element besitzt. **1 Pkt.**

(b) Weisen Sie nach, dass für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ . **2 Pkt.**

*Hinweis:* Sie dürfen für die Beweise *nur* diejenigen Axiome und Sätze heranziehen, die in der Vorlesung jeweils *vor* der Formulierung der hier zu beweisenden Aussagen bewiesen wurden.

#### Aufgabe 4.2

(a) Weisen Sie nach, dass für beliebige  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  mit  $b \neq 0, d \neq 0$  gilt:  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$ . **2 Pkt.**

(b) Weisen Sie nach, dass für alle  $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$  gilt:  $x \cdot x > 0$ . **2 Pkt.**

(c) Weisen Sie nach, dass für alle  $x \in \mathbb{R}, x > 0$  gilt  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  und das Gleichheitszeichen genau für  $x = 1$  zutrifft. **1 Pkt.**

*Hinweis:* Beachten Sie auch zu dieser Aufgabe den obigen Hinweis. Beachten Sie auch, dass  $\frac{x}{y}$  lediglich eine andere Schreibweise von  $x \cdot (y^{-1})$  ist.

#### Aufgabe 4.3

(a) Finden Sie alle  $x \in \mathbb{R}$ , welche die Ungleichung  $|2 - |x + 1|| \leq 1$  erfüllen. **1 Pkt.**

(b) Für welche  $m \in \mathbb{N}$  gilt  $\left| \frac{26}{m} - \frac{13}{10} \right| = 2 \left| \frac{13}{m} - \frac{1}{4} \right| + \left| \frac{4}{5} \right|$ ? Begründen Sie Ihre Antwort. **2 Pkt.**

(c) Für welche  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $\frac{x+1}{x+2} > 3$ ? **2 Pkt.**

#### Aufgabe 4.4

(a) Zeigen Sie, dass für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  die Ungleichung  $\frac{|a|}{1+|a|} \leq \frac{|a+b|}{1+|a+b|} + \frac{|b|}{1+|b|}$  gilt. **3 Pkt.**

(b) Weisen Sie nach, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $n! \leq 2 \left( \frac{n}{2} \right)^n$ . **4 Pkt.**

*Hinweis:* Beweisen Sie zunächst, dass für alle  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$  gilt:  $2n^n \leq (n+1)^n$  (dazu können Sie die Bernoulli-Ungleichung benutzen). Verwenden Sie diese Ungleichung dann für den Beweis der Behauptung.

Insgesamt: **20 Pkt.**