Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 5

Abgabe am 23. 11. 2015

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags vor der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 5.1

- (a) Wenn a und b irrational sind, ist $a + b$ dann notwendig irrational?
(b) Wenn a (mit $a \neq 0$) rational ist und b irrational ist, ist $a \cdot b$ dann notwendig irrational?
(c) Gibt es zwei irrationale Zahlen a und b , deren Summe und Produkt rational sind?

Geben Sie jeweils Begründungen oder Gegenbeispiele (a, b) bzw. Beispiele (c) an.

3 Pkt.

Aufgabe 5.2

- (a) Es sei M eine nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $-M = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -x \in M\}$. Weisen Sie nach, dass dann gilt: $\inf M = -\sup(-M)$. **2 Pkt.**
(b) Es seien M, N nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $M \cap N \neq \emptyset$. Weisen Sie nach, dass $\sup(M \cap N)$ existiert und $\sup(M \cap N) \leq \min\{\sup M, \sup N\}$ gilt. Geben Sie ein Beispiel für $\sup(M \cap N) \neq \min\{\sup M, \sup N\}$ an. **3 Pkt.**

Aufgabe 5.3

- (a) Eine Gesamtstrecke g setzt sich aus einer kürzeren Teilstrecke k und einer längeren Teilstrecke l zusammen ($g = l + k$), wobei das Längenverhältnis v zwischen der Gesamtstrecke und der längeren Teilstrecke gleich dem Längenverhältnis zwischen der längeren und der kürzeren Teilstrecke ist: $v = \frac{g}{l} = \frac{l}{k}$. Bestimmen Sie dieses Längenverhältnis v . **2 Pkt.**
(b) Ein Blatt Papier in einem DIN-Format erfüllt die folgende Bedingung: Wird das Blatt parallel zu seiner kürzeren Seite b in der Mitte durchgeschnitten, so stehen die Seitenlängen der dadurch entstehenden kleineren Blätter in demselben Verhältnis wie die Seitenlängen a und b des ursprünglichen Blattes Papier. Zeigen Sie, dass durch diese Bedingung das Verhältnis $\frac{a}{b}$ eindeutig festgelegt ist und bestimmen Sie dieses Verhältnis. **2 Pkt.**
(c) Überlegen Sie, was der Term $\frac{x + y + |x - y|}{2}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) angibt und beweisen Sie Ihre Vermutung. **2 Pkt.**

Aufgabe 5.4

Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und bestimmen Sie (falls vorhanden) $\sup M$ und $\inf M$. Entscheiden Sie weiterhin, ob M ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

- (a) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 27\}$ **1 Pkt.** (c) $M = \left\{ \frac{x}{x-1} \mid x < 1, x \in \mathbb{R} \right\}$ **1 Pkt.**
(b) $M = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ **3 Pkt.** (d) $M = \left\{ 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^m} \mid n, m \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$ **1 Pkt.**

Begründen Sie Ihre Entscheidung bei Aufgabe (b) lückenlos anhand der Definitionen. Bei den Aufgaben (a), (c) und (d) können Sie anschaulich-intuitive Entscheidungen treffen und diese kurz begründen.

Insgesamt: **20 Pkt.**