Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2015/16

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis I** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 6

Abgabe am 30. 11. 2015

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 6.1

Weisen Sie mithilfe der Definition der n-ten Wurzel und der Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten nach, dass für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$.
Bemerkung: Die Potenzgesetze für rationale Exponenten dürfen *nicht* verwendet werden. **2 Pkt.**

Aufgabe 6.2

(a) Weisen Sie die Gültigkeit des folgenden Potenzgesetzes für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^+$ und $q \in \mathbb{Q}$ nach: $x^q \cdot y^q = (x \cdot y)^q$. Achten Sie dabei strikt darauf, nur Tatsachen zu verwenden, die in der Vorlesung *vor* der Formulierung dieses Gesetzes behandelt wurden. **2 Pkt.**

(b) Beweisen Sie (mithilfe des Binomischen Lehrsatzes), dass für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt: $(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4}x^2$. **2 Pkt.**

(c) Weisen Sie nach, dass für alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt: $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$. **2 Pkt.**

Aufgabe 6.3

(a) Ist die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n}{2^n}$ konvergent oder divergent? Beweisen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Eine Übungsaufgabe aus einer früheren Übungsserie ist hierfür hilfreich. **2 Pkt.**

(b) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge (d. h. eine Folge mit dem Grenzwert 0) und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann ebenfalls eine Nullfolge ist.

Zeigen Sie außerdem durch ein Beispiel, dass auf die Voraussetzung „$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt" nicht verzichtet werden kann. **5 Pkt.**

Aufgabe 6.4

Beschreiben Sie für jede der folgenden Bedingungen die Menge der reellen Folgen, die diese Eigenschaft erfüllen, mit wenigen Worten.
Verwenden Sie dabei (falls zutreffend) Begriffe wie „konvergiert", „divergiert", „ist Nullfolge", „ist (nach oben/ nach unten) beschränkt/ unbeschränkt", „ab einem gewissen Glied konstant".

(a) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq n_0 : |a_n| < \varepsilon$
(b) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, n \geq n_0 : |b_n| < \varepsilon$
(c) $\forall\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, n \geq n_0 : |c_n| < \varepsilon$
(d) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq n_0 \;\; \exists\, \varepsilon > 0 : |d_n| < \varepsilon$
(e) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \exists\, n \geq n_0 : |e_n| > \varepsilon$
(f) $\exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \;\; \exists\, n \geq n_0 : |f_n| > \varepsilon$ **5 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**