Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2015/16

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis I** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 8

Abgabe am 14. 12. 2015

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 8.1

Zeigen Sie, dass für beliebige $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} n^p q^n = 0\,.$$

Hinweis: Bilden Sie die n-ten Wurzeln der Beträge der Folgenglieder. **2 Pkt.**

Aufgabe 8.2

(a) Untersuchen Sie die Folgen (a_n) und (b_n) auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.

(a1) $a_n = \dfrac{1-n+n^2}{n+1}$ **2 Pkt.** (a2) $b_n = \dfrac{1-n+n^2}{n(n+1)}$ **2 Pkt.**

Hinweis: Für die Monotoniebetrachtungen kann es sinnvoll sein, Differenzen oder Quotienten aufeinanderfolgender Glieder zu betrachten.

(b) Untersuchen Sie die Folgen (a_n) und (b_n) mit den unten angegebenen Gliedern auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte:

(b1) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ **2 Pkt.**

Hinweis: Die Bernoulli-Ungleichung ist hilfreich bei der Lösung der Aufgabe.

(b2) $b_n = \dfrac{1+q^n}{1+q^n+(-q)^n}$ mit $q > 0$ **2 Pkt.**

Hinweis: Führen Sie eine Fallunterscheidung durch. Welche Fälle für q sollte man unterscheiden?

Aufgabe 8.3

Zeigen Sie, dass die Folge (x_n), die durch die rekursive Bildungsvorschrift $x_0 := 0$ und $x_{n+1} := \sqrt{x_n + c}$ mit $c > 0$ gegeben ist, konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

(a) Lösen Sie die Aufgabe für $c = 1$. **3 Pkt.**

(b) Lösen Sie die Aufgabe nun für beliebige $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. **2 Pkt.**

(Diese Aussage kann natürlich als Beweis für (a) genutzt werden, denn (a) ist ein Spezialfall von (b). Umgekehrt kann (a) zur Ideenfindung für (b) genutzt werden.)

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Folge von unten durch 0 und von oben durch $2 \cdot \max\{1, c\}$ beschränkt ist.

Aufgabe 8.4

(a) Beweisen Sie mit der Definition des Grenzwerts folgende Aussage: Wenn (a_n) eine Nullfolge ist, so ist auch die Folge (b_n) mit

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j, \quad n \in \mathbb{N},$$ **3 Pkt.**

eine Nullfolge.

Hinweis: Schreiben Sie mit der Definition des Grenzwerts auf, was es bedeutet, dass (a_n) eine Nullfolge ist. Spalten Sie die Summe in der Definition von (b_n) entsprechend auf.

(b) Weisen Sie nach, dass die Folge (b_n) mit $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ streng monoton fallend ist. **2 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**