Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2015/16

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis I** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 9

Abgabe am 04. 01. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 9.1

Begründen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ konvergiert und berechnen Sie ihren Wert. **2 Pkt.**

Aufgabe 9.2

Stellen Sie fest, ob die folgende Reihen konvergieren.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + n}{10^7 \cdot n^5}$ **1 Pkt.** (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 2^{-3n-1}$ **2 Pkt.** (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]$ **2 Pkt.**

Hinweis: Überlegen Sie jeweils, ob das Majoranten-/Minoranten-, das Quotienten-, das Wurzel-, das Leibniz-Kriterium bei der Lösung hilfreich sind.

Aufgabe 9.3

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen absolut konvergieren:

(a1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^{n-1}}$ (a2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right)^n$ **3 Pkt.**

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2 - 4\right)^n$ konvergiert. **2 Pkt.**

(c) Oberwichtel Heinz hat sein fünfhundertstes Dienstjubiläum. Die Wichtel wollen ihm zu Ehren eine ganz besondere Weihnachtspyramide bauen. Sie soll unglaublich groß und zugleich unglaublich filigran sein. Also beschließen sie, nacheinander Stufen der Pyramide zu bauen, deren Höhen gegen null streben, die aufeinandergestapelt aber trotzdem eine unendlich hohe Pyramide ergeben.

Nun ist der Weihnachtsmann leider etwas eitel und wäre sehr beleidigt, wenn sein Oberwichtel ein so tolles Geschenk bekäme und er leer ausginge. Deswegen wollen die Wichtel ihm auch eine solche Pyramide bauen, und sicherheitshalber soll die Pyramide des Weihnachtsmannes unendlich viel höher werden als die vom Oberwichtel.

Wichtel Nepomuk hat mal wieder was zu meckern: „Wie soll das denn gehen? Es ist unmöglich eine Pyramide zu bauen, die unendlich viel höher als eine unendlich hohe Pyramide ist!“.

Also beschließen die Wichtel, beide Pyramiden parallel aufzubauen und immer nach Aufbau der n-ten Stufe die Höhen zu vergleichen – diese Differenz soll gegen Unendlich streben.

Ist dieses Vorhaben möglich? (Unendliche Prozesse sind am Nordpol natürlich kein Problem – jedes Kind weiß schließlich, dass der Weihnachtsmann es auch schafft, in nur einer Nacht die ganze Welt zu beliefern.)

Ist es also möglich, eine divergente Reihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ zu konstruieren, wobei alle $a_n > 0$ sind und $a_n \to 0$ gilt? Geben Sie ein Beispiel an oder zeigen Sie, dass es unmöglich ist, eine derartige Folge zu konstruieren.

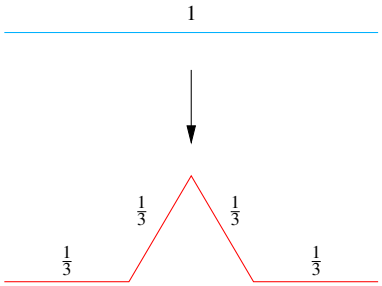
Hinweis: Sind die Voraussetzungen für das Leibniz-Kriterium erfüllt? **2 Pkt.**

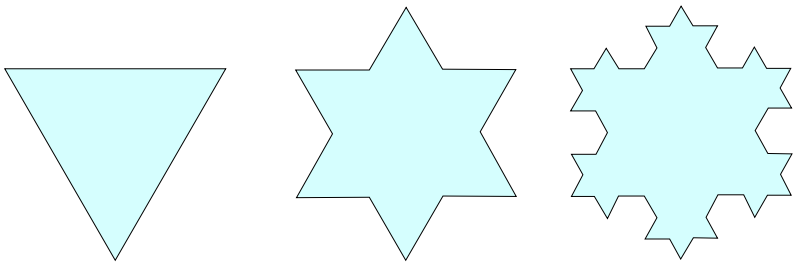
— Bitte beachten Sie auch die folgenden beiden Seiten. —

Aufgabe 9.4

Wie am Schneefall des letzten Jahres unschwer zu erkennen war, kommt Frau Holle so langsam in die Jahre. Sie schafft es einfach nicht mehr, die üblichen Schneemengen herzustellen. Deswegen hat der Nordpol-Rat beschlossen, die Wichtel zu ihrer Unterstützung heranzuziehen (natürlich erst nach Weihnachten). Da Oberwichtel Heinz sehr ehrgeizig ist, hat er schon Schnittmuster und Maschine für ganz besondere Schneeflocken entworfen:

Die Maschine funktioniert über einen iterativen Prozess: Ausgehend von einer Schneeflocke mit der Form eines gleichseitigen Dreiecks der Kantenlänge 1 wird jede Kante durch den in der linken Abbildung gezeigten Streckenzug ersetzt. Dieser Prozess wird nun wieder und wieder wiederholt. Die rechte Abbildung zeigt die „Ausgangsflocke“ und die ersten zwei Iterationen der Kurve.





(a) Wichtel Nepomuk findet wie immer etwas zu nörgeln: „Wieder und wieder wiederholen? Damit werden wir ja niemals fertig!“

Oberwichtel Heinz hält dagegen: „Die anzubauenden Teile, lieber Nepomuk, werden doch immer kleiner. Daher braucht jeder Iterationsschritt nur ein Drittel der Zeit des vorherigen Schrittes.“

Der erste Schritt braucht 10 Sekunden. Wie lange dauert es, eine Schneeflocke herzustellen?

(b) Wichtel Nepomuk lässt nicht locker: „Bei dieser Anleitung reicht unser Eisgarn ja nicht einmal für die erste Flocke.“ Oberwichtel Heinz will das natürlich nicht auf sich sitzen lassen und rechnet selbst nach – laut seiner Rechnung müssten die Vorräte problemlos reichen.

Wie kommen die beiden zu ihren Behauptungen? Bestimmen Sie den Umfang und den Flächeninhalt der im Grenzprozess entstehenden Figur, und versuchen Sie ein Urteil darüber abzugeben, wer der beiden nun Recht hat: Reichen die Vorräte oder nicht?

6 Pkt.

Hinweis:
Überlegen Sie sich, aus wie vielen Strecken welcher Länge die Kurve nach der n-ten Iteration besteht. Wie viele Dreiecke welcher Fläche kommen dann im nächsten Schritt dazu?

Insgesamt: **20 Pkt.**

— Bitte beachten Sie auch die Zusatzaufgaben auf der folgenden Seite. —