Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Wintersemester 2015/16

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis I** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 10

Abgabe am 11. 01. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 10.1

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ zwar konvergiert, ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst allerdings divergiert. Warum ist das möglich? **3 Pkt.**

Aufgabe 10.2

Weisen Sie nach, dass die durch $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ definierte Funktion exp folgende Eigenschaften besitzt:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) > 0$. Ist $x > 0$, so $\exp(x) > 1$, für $x < 0$ ist $\exp(x) < 1$. **2 Pkt.**

(b) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(n) = \mathrm{e}^n$. **3 Pkt.**

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zunächst für $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion und begründen Sie dann, dass sie auch für $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ gilt.

(c) exp ist über $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. **1 Pkt.**

Aufgabe 10.3

(a) Ist die Nacheinanderausführung von Funktionen kommutativ? Geben Sie einen Beweis (falls Sie die Frage mit „ja“ beantworten) oder ein Gegenbeispiel an (falls Ihre Antwort „nein“ lautet). **1 Pkt.**

(b) Welche Funktionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ erfüllen die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{(f. a. } x, y \in \mathbb{Q}\text{)}\,?$$

(Zeigen Sie insbesondere, dass *nur* die von Ihnen angegebenen Funktionen die Funktionalgleichung erfüllen.) **5 Pkt.**

Aufgabe 10.4

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen x_0 Grenzwerte besitzen. Falls dies nicht der Fall ist, so überprüfen Sie, ob sie in x_0 links- oder rechtsseitige Grenzwerte besitzen. Begründen Sie Ihre Aussagen.

(a) f mit $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ und $f(x) = \frac{2x+3}{3x+1}$, $x_0 = -\frac{1}{3}$ **2 Pkt.**

(b) f mit $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ und $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$, $x_0 = 1$ **2 Pkt.**

(c) f mit $D = \mathbb{R}$ und $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{für } x < 1 \\ 3x+2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$ **1 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**