

Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis I (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 11

Abgabe am 18. 01. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 11.1

Seien f, g reellwertige Funktionen mit Definitionsbereichen D_f bzw. $D_g \subseteq \mathbb{R}$.

Weisen Sie nach: Ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ mit $b \neq 0$, so gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

3 Pkt.

Hinweis: Sie können den entsprechenden Grenzwertsatz für Folgen benutzen, müssen aber absichern, dass die dort getroffenen Voraussetzungen für die Nennerfolge erfüllt sind.

Aufgabe 11.2

Berechnen Sie die folgenden eigentlichen bzw. uneigentlichen Grenzwerte (mit vollständigem Lösungsweg):

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12}{x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12}$ **2 Pkt.**

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ **2 Pkt.**

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$ **1 Pkt.**

Aufgabe 11.3

(a) Beweisen Sie die folgende Richtung des „ ε - δ -Kriteriums“ für Grenzwerte von Funktionen:

Es sei f eine Funktion, die in einer (auch punktierten) Umgebung eines Wertes $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert ist und $g \in \mathbb{R}$. Falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ aus $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - g| < \varepsilon$, so hat f an der Stelle x_0 den Grenzwert g .

3 Pkt.

(b) Bestimmen Sie jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und das zugehörige Bild der Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Abbildungsvorschriften:

(b1) $f(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{x}$ **1 Pkt.**

(b2) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2}$ **2 Pkt.**

Hinweis: Finden Sie zunächst alle $x \in \mathbb{R}$, für die $f(x)$ nicht definiert ist.

Aufgabe 11.4

Es sei $f: X \rightarrow Y$ und $A \subset X, B \subset Y$. Welche der folgenden Behauptungen sind allgemein wahr? Beweisen Sie die Behauptungen oder geben Sie Gegenbeispiele an.

(a1) $f(X \setminus A) \subseteq f(X) \setminus f(A)$ (b1) $f^{-1}(Y \setminus B) \subseteq X \setminus f^{-1}(B)$ (c1) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

(a2) $f(X \setminus A) \supseteq f(X) \setminus f(A)$ (b2) $f^{-1}(Y \setminus B) \supseteq X \setminus f^{-1}(B)$ (c2) $A \supseteq f^{-1}(f(A))$

(a3) $f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$ (b3) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ (c3) $A = f^{-1}(f(A))$

2 Pkt.

2 Pkt.

2 Pkt.

Insgesamt: **20 Pkt.**