Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis I** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 12

Abgabe am 25. 01. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 12.1

Weisen Sie nach, dass die natürliche Exponentialfunktion exp in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist. **3 Pkt.**

Hinweis: Benutzen Sie die in der Vorlesung bewiesene Tatsache $\lim\limits_{x\to 0} \exp(x) = 1$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(x_n) = 1$ für beliebige Nullfolgen (x_n)) und andere aus der Vorlesung bekannte Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Aufgabe 12.2

(a) Weisen Sie nach: Jede auf einem Intervall $(a;b)$ stetige und injektive Funktion $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ ist auf $(a;b)$ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. **5 Pkt.**

Hinweis: Führen Sie den Beweis indirekt. Beweisen Sie dazu zunächst: Wenn eine injektive Funktion $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ *nicht* streng monoton wachsend oder streng monoton fallend auf $(a;b)$ ist, so existieren $x_1, x_2, x_3 \in (a;b)$ mit $x_1 < x_2 < x_3$ und mit $f(x_1) < f(x_2)$ und $f(x_2) > f(x_3)$ oder mit $f(x_1) > f(x_2)$ und $f(x_2) < f(x_3)$. Nutzen Sie dies dann, um mithilfe des Zwischenwertsatzes einen Widerspruch zur Injektivität von f zu konstruieren.

(b) Gegeben sei eine Funktion f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ mit der folgenden Zwischenwerteigenschaft: Sind y_1, $y_2 \in f([a,b])$, so ist $y \in f([a,b])$ für jedes y zwischen y_1 und y_2. Ist f notwendigerweise stetig? Beweisen Sie Ihre Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an. **2 Pkt.**

Aufgabe 12.3

(a) Welche der folgenden Aussagen über eine Funktion f: $(a,b) \to \mathbb{R}$ sind richtig, welche sind falsch? (Geben Sie Begründungen bzw. Gegenbeispiele an.) **3 Pkt.**

(i) f ist auf (a,b) stetig, falls für jedes $x_0 \in (a,b)$ der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ existieren und übereinstimmen.

(ii) Falls f auf (a,b) stetig ist, ist f auf (a,b) auch beschränkt.

(iii) Falls f auf (a,b) stetig ist und eine Nullstelle besitzt, aber nicht die konstante Funktion f mit $f(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$ ist, dann gibt es Stellen x_1, $x_2 \in (a,b)$ mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$.

(b) Lassen sich reelle Zahlen c beziehungsweise d so wählen, dass die folgenden Funktionen f: $D \to \mathbb{R}$ beziehungsweise g: $D \to \mathbb{R}$ stetig sind? **2 Pkt.**

$$\text{(b1)} \quad D = [-1,1], \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}, & x \neq 1 \\ c, & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{(b2)} \quad D = (0,1], \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3-x}, & x \neq 1 \\ d, & x = 1 \end{cases}$$

Aufgabe 12.4

Verwenden Sie die ε-δ-Formulierung der Stetigkeit, um zu zeigen, dass die folgenden Funktionen stetig sind. Ist eine von ihnen gleichmäßig stetig (oder sind es sogar beide)?

(a) $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2-x-2}$ **2 Pkt.** (b) $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{x^2-2}{x+1}$ **3 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**