Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis I** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 13

Abgabe am 01. 02. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 13.1

Weisen Sie nach, dass die natürliche Exponentialfunktion exp die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ surjektiv auf die positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ abbildet. **2 Pkt.**

Hinweis: Verwenden Sie Eigenschaften von exp, die bereits bewiesen wurden, sowie den Zwischenwertsatz.

Aufgabe 13.2

(a) Weisen Sie nach: Für alle $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. **1 Pkt.**

Hinweis: Verwenden Sie Eigenschaften der Funktion $\exp_a$.

(b) Weisen Sie nach, dass für beliebige $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ gilt: $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$. **1 Pkt.**

(c) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Weisen Sie (auf Grundlage der Definition $a^x := \exp_a(x) = \exp(x\cdot\ln a)$) nach: **3 Pkt.**

(i) $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$ (ii) $a^x b^x = (ab)^x$ (iii) $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

Aufgabe 13.3

(a) Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 > 0$ gilt: $\log_a(x_1\cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)$. **1 Pkt.**

(b) Zeigen Sie die Richtigkeit der folgenden Grenzwerte. **4 Pkt.**

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^k} = \infty$ (f. a. $k \in \mathbb{N}$) (ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} \ln x = -\infty$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} x^x = 1$ (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Aufgabe 13.4

Die hyperbolischen Funktionen *Kosinus hyperbolicus* $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und *Sinus hyperbolicus* $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind folgendermaßen definiert:

$$\cosh x := \tfrac{1}{2}\left(\exp(x) + \exp(-x)\right), \qquad \sinh x := \tfrac{1}{2}\left(\exp(x) - \exp(-x)\right)$$

(a) Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Formeln für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ nach: **2 Pkt.**

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\,, \\ \sinh(x+y) &= \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y\,, \\ (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 &= 1\,. \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass cosh über $\mathbb{R}^+$ und sinh über $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend sind. **2 Pkt.**

(c) Die Umkehrfunktionen von sinh und cosh heißen *Area sinus hyperbolicus* $\operatorname{Ar}\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und *Area kosinus hyperbolicus* $\operatorname{Ar}\cosh\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen gelten:

$$\operatorname{Ar}\sinh x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \qquad \operatorname{Ar}\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{-1+x^2}\right).$$ **4 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**