Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis I** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 14

Abgabe am 08. 02. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 14.1

Berechnen Sie – ohne die Verwendung von Ableitungsregeln – für die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für beliebige $x_0 \in D$.

(a) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \frac{1}{x}$ **1 Pkt.**

(b) $f\colon \mathbb{R}^+\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \sqrt{x}$ **2 Pkt.**

Aufgabe 14.2

(a) Es sei $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Tangente an den Graphen von f an einer beliebigen Stelle x_0 die x-Achse immer im Punkt $(x_0 - 1, 0)$ schneidet. **2 Pkt.**

(b) Es sei $f : (0; \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$. Zeigen Sie, dass das Dreieck, dass von der Tangente an den Graphen von f an einer beliebigen Stelle $x_0 \in (0; \infty)$ und den Koordinatenachsen gebildet wird, immer den Flächeninhalt 2 hat. **2 Pkt.**

(c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ gilt: $f'(x) = nx^{n-1}$. Zeigen Sie, dass diese Regel auch für beliebige negative n, also $n \in \mathbb{Z}$ gilt (wobei der Definitionsbereich auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ einzuschränken ist). Die in der Vorlesung behandelten Ableitungsregeln *außer der Kettenregel* dürfen hierfür verwendet werden. **2 Pkt.**

Aufgabe 14.3

(a) Weisen Sie nach: Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ und f eine Funktion, die in einer Umgebung U von x_0 definiert ist und in der Form

$$f(x) = f(x_0) + c \cdot (x - x_0) + \varphi(x) \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R},\ \varphi\colon U \to \mathbb{R},\ \lim_{x\to x_0,\, x\neq x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0$$

dargestellt werden kann, so ist f in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = c$. **2 Pkt.**

(b) Bestimmen Sie die Ableitung der Exponentialfunktion $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit $a \in \mathbb{R}, a > 0$). **1 Pkt.**

Hinweis: Hierfür und auch für die folgenden Aufgaben dürfen alle bekannten Ableitungsregeln verwendet werden.

(c) Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen f und g mit **2 Pkt.**

$$f\colon\ \mathbb{R}^+\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right), \qquad g\colon\ \mathbb{R}^+\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\,,\ g(x) = x^{(x^x)}.$$

Aufgabe 14.4

(a) Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen $\cosh\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (siehe Übungsserie 13) sowie Tangens hyperbolicus $\tanh\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tanh := \frac{\sinh}{\cosh}$ und formen Sie diese in eine möglichst kurze Darstellung um. **1 Pkt.**

(b) Zeigen Sie, dass die Tangens-hyperbolicus-Funktion streng monoton wachsend ist und $\mathbb{R}$ bijektiv auf das (offene) Intervall $(-1; 1)$ abbildet. (Der Zusammenhang zwischen Monotonie und Ableitung darf hierfür noch *nicht* verwendet werden.) **3 Pkt.**

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\tanh x = \frac{1-\exp(-2x)}{1+\exp(-2x)}$ gilt und benutzen Sie dies für den Beweis der Monotonie.

(c) Begründen Sie, dass die Umkehrfunktion von tanh *Area tangens hyperbolicus* $\operatorname{Ar}\tanh\colon (-1; 1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und zeigen Sie, dass $\operatorname{Ar}\tanh'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ gilt. **2 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**