Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis II** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 1

Abgabe am 25. 04. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 1.1

(a) Zeigen Sie: Ist $z = a + b\mathrm{i}$ eine beliebige, von Null verschiedene komplexe Zahl und $z' = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$, so gilt $z \cdot z' = 1$; z' ist also das multiplikativ Inverse zu z. **2 Pkt.**

(b) Zeigen Sie: Das multiplikativ Inverse einer komplexen Zahl ist eindeutig bestimmt (erst dadurch ist die Verwendung des bestimmten Artikels in Aufgabenteil a) gerechtfertigt): Gilt $z \cdot z' = 1$ und $z \cdot z'' = 1$ (für eine beliebige, von Null verschiedene komplexe Zahl z), so ist $z' = z''$. **3 Pkt.**

(c) Berechnen Sie (d. h. wandeln Sie in die algebraische Form $a + b\mathrm{i}$ um):
(c1) $\frac{1}{3-\frac{1}{2}\mathrm{i}}$ (c2) $\frac{3+4\mathrm{i}}{2-5\mathrm{i}}$ (c3) $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ **3 Pkt.**

Aufgabe 1.2

(a) Lösen Sie folgende Gleichungen in $\mathbb{C}$ mithilfe quadratischer Ergänzung.
(a1) $z^2 + 10z + 34 = 0$ (a2) $z^2 - 6z + 12 = 0$ **2 Pkt.**

(b) Wandeln Sie folgende komplexe Zahlen in die Polarform $z = |z| \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha)$ um.
(b1) $1 - \mathrm{i}$ (b2) $-6 + 8\,\mathrm{i}$ **2 Pkt.**

(c) Berechnen Sie die Quadratwurzeln von $z = 2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \mathrm{i}$. **2 Pkt.**

(d) Weisen Sie nach: Ist (c_n) eine konvergente Zahlenfolge aus $\mathbb{C}$ mit $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, so gilt auch $|c| = \lim\limits_{n\to\infty} |c_n|$. **3 Pkt.**

Aufgabe 1.3

(a) Untersuchen Sie, ob die Folge (c_n) mit $c_n = \frac{n}{n^2+1} + \sqrt[n]{2}\,\mathrm{i}$ konvergiert und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert (mit Begründung). **1 Pkt.**

(b) Zeigen Sie, dass die Folge (c_n) mit $c_n = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^n$ divergiert und geben Sie alle Häufungspunkte dieser Folge an. **2 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**