Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis II** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 3

Abgabe am 09. 05. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 3.1

(a) Zeigen Sie, dass für die Ableitung der Tangensfunktion gilt: $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,|k \in \mathbb{Z} \right\}$. **1 Pkt.**

(b) Bestimmen Sie die Ableitungen der Arcussinus-, der Arcuskosinus- sowie der Arcustangens-Funktion und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich. **3 Pkt.**

(c) Berechnen Sie Näherungswerte für
- $\ln 1{,}1$
- $\sqrt{101}$

mit einem Fehler von weniger als 0,001.
Verwenden Sie keinen Taschenrechner, sondern nur den Satz von Taylor. **4 Pkt.**

Aufgabe 3.2

(a) Zeigen Sie, dass für $f : (-1; 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ und $x_0 = 0$ die Taylorformel in der Form

$$\ln \frac{1-x}{1+x} = -2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right) + R_{2n}(f, 0)(x)$$

mit dem Restglied

$$R_{2n}(f, 0)(x) = -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \left(\frac{1}{(1+\theta x)^{2n+1}} + \frac{1}{(1-\theta x)^{2n+1}} \right)$$

mit $\theta \in (0, 1)$ geschrieben werden kann. **5 Pkt.**

(b) Bestimmen Sie mithilfe des Taylorpolynoms aus Aufgabe (a) vom Grad $n = 2$ einen Näherungswert für $\ln(2/3)$ und zeigen Sie, dass der Fehler kleiner als $5 \cdot 10^{-4}$ ist. **3 Pkt.**

Aufgabe 3.3

(a) Ermitteln Sie eine (von x abhängige) obere Schranke für den absoluten Fehler der Näherungsformel $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Für welche Werte von x ist der Fehler sicher kleiner als 10^{-4}? **2 Pkt.**

(b) Bestimmen Sie – falls vorhanden – alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$.
Zeigen Sie dazu, dass f' nur eine Nullstelle hat. **2 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**