Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis II** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 5

Abgabe am 30. 05. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 5.1

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale (durch partielle Integration und/oder Substitution): **9 Pkt.**

(a) $\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{e}^x dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}dt$ (c) $\displaystyle\int_0^\pi t^2\sin(2t)\,d\,t$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 r^2\sqrt{1-r}\,dr$ (f) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x}\arctan((\ln(x))^3)\,dx$

Aufgabe 5.2

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von dem Parameter $a > 0$ eine Stammfunktion zu $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\cos(\ln(ax))}{x}$. **1 Pkt.**

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{4x}+1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$. **2 Pkt.**

(c) Wir betrachten eine stetige Funktion $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Aus

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$$

für alle über $[a,b]$ definierten stetigen Funktionen g mit $g(a) = g(b) = 0$ folgt, dass f identisch null ist. **4 Pkt.**

Hinweis: Führen Sie einen Beweis durch Widerspruch, indem Sie annehmen, dass f an einer Stelle $x_0 \in [a;b]$ ungleich null ist.

Aufgabe 5.3

Zeigen Sie, dass für eine stetig differenzierbare, umkehrbare Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx = b\,f(b) - a\,f(a)\,,$$

und veranschaulichen Sie die Aussage durch eine Skizze. **4 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**