Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis II** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 6

Abgabe am 06. 06. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 6.1

(a) Die *Fresnel-Integrale* C und S sind auf $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt\,, \qquad S(x) = \int_0^x \sin(t^2)\, dt\,.$$

Bestimmen Sie alle Extrema der Funktionen C und S und entscheiden Sie, ob es sich um Maxima oder Minima handelt. **4 Pkt.**

(b) Durch das Parameterintegral $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^\infty x^{t-1}\, \mathrm{e}^{-x}\, dx$ (mit $t > 0$) ist die Gammafunktion definiert. Weisen Sie nach:

- $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$ (für alle $x \in \mathbb{R}^+$) **2 Pkt.**
- $\Gamma(n+1) = n!$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) **2 Pkt.**

Aufgabe 6.2

(a) Die folgenden Aussagen zu uneigentlichen Integralen (über unbeschränkte Integranden oder unbeschränkte Intervalle) sind falsch. Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an. **3 Pkt.**

(a1) Wenn $\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\, dx$ existiert, dann existieren auch $\int_a^b f(x)\, dx$ und $\int_a^b g(x)\, dx$.

(a2) Wenn $\int_a^b f(x)\, dx$ und $\int_a^b g(x)\, dx$ existieren, dann existiert auch $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$.

(a3) Wenn $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ existiert, dann existieren auch $\int_a^b f(x)\, dx$ und $\int_a^b g(x)\, dx$.

(b) Lässt man den Graphen der Funktion $f : [0;2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ im Raum um die x-Achse rotieren, so begrenzt er (zusammen mit der auf der x-Achse senkrecht stehenden Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(2;0)$ und Radius $\sqrt{2}$) einen Rotationskörper.

(b1) Wir unterteilen das Intervall $[0;2]$ in 200 gleich lange Teilintervalle und betrachten in jedem dieser Teilintervalle einen schmalen Zylinder maximalen Volumens, der vollständig innerhalb des Rotationskörpers liegt. Berechnen Sie das Gesamtvolumen des Körpers, der von diesen 200 „Innenzylindern“ gebildet wird. **2 Pkt.**

(b2) Nun betrachten wir für jedes Teilintervall einen schmalen Zylinder minimalen Volumens, der den Teil des Rotationskörpers in dem jeweiligen Teilintervall vollständig einschließt. Berechnen Sie das Gesamtvolumen des Körpers, den diese 200 „Außenzylinder“ bilden. **1 Pkt.**

(b3) Lassen Sie die Zahl der Teilintervalle gegen Unendlich gehen und berechnen Sie die Volumina des von den „Innen-“ und des von den „Außenzylindern“ gebildeten Körper. **2 Pkt.**

Aufgabe 6.3

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. **4 Pkt.**

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k\mathrm{e}^{-k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^k\mathrm{e}^{-k}$

Insgesamt: **20 Pkt.**