

## Übungsaufgaben zur Vorlesung Analysis II (Kombinationsbachelor-Studiengang)

### Übungsserie 7

Abgabe am 13. 06. 2016

#### Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

#### Aufgabe 7.1

Betrachten Sie die logarithmische Spirale:  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{ct} \cos t \\ e^{ct} \sin t \end{pmatrix}$  mit  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

- (a) Berechnen Sie die Bogenlänge  $L(\gamma|_{[a;b]})$  der logarithmischen Spirale über einem Parameterintervall  $[a; b]$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . **2 Pkt.**
- (b) Existiert  $\lim_{a \rightarrow -\infty} L(\gamma|_{[a;0]})$ ?  
Führen Sie ggf. eine Fallunterscheidung in Abhängigkeit von  $c$  durch. **1 Pkt.**
- (c) Zeigen Sie, dass die logarithmische Spirale jeden Kreis um den Koordinatenursprung in genau einem Punkt schneidet und berechnen Sie den Kosinus des Schnittwinkels. **4 Pkt.**

#### Aufgabe 7.2

- (a) Die Traktrix ist gegeben durch  $\gamma: (0; \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \end{pmatrix}$ . Zeigen Sie, dass für jeden Punkt der Traktrix (mit Ausnahme des Punktes, an dem die Kurve nicht regulär ist) die Strecke auf der Tangente vom Kurvenpunkt bis zum Schnittpunkt der Tangente mit der  $y$ -Achse die Länge Eins hat. **4 Pkt.**
- (b) Berechnen Sie die Bogenlänge des Graphen der Funktion  $f: [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sqrt{x^3}$ . **4 Pkt.**

#### Aufgabe 7.3

- (a) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit dem Radius  $r$  als Rotationskörper bei Rotation des Graphen einer geeigneten Funktion  $f$  um die  $x$ -Achse. **2 Pkt.**
- (b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation des Graphen der Funktion  $f: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sin x$  um die  $x$ -Achse entsteht. **3 Pkt.**  
*Hinweis:* Nutzen Sie partielle Integration.

Insgesamt: **20 Pkt.**